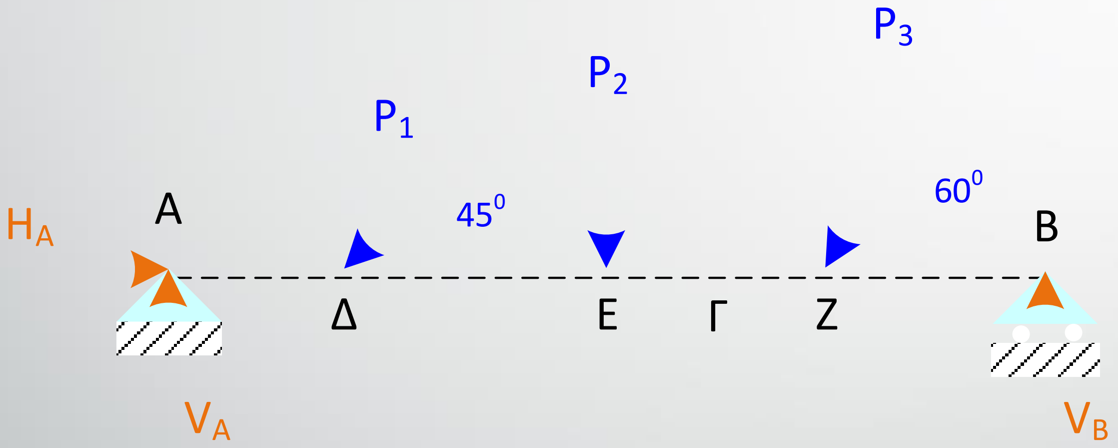
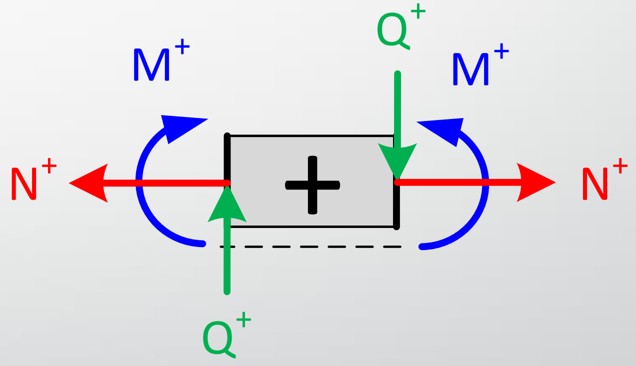
Διαγράμματα Εσωτερικών Εντατικών Μεγεθών (MQN)

Διαγράμματα MQN

- Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε ότι:

$$\mathrm{N}_{\Gamma} = -20\ kN$$
$$Q_{\Gamma} = -0{,}254\ kN$$
$$\mathrm{M}_{\Gamma} = +35{,}022\ kNm$$



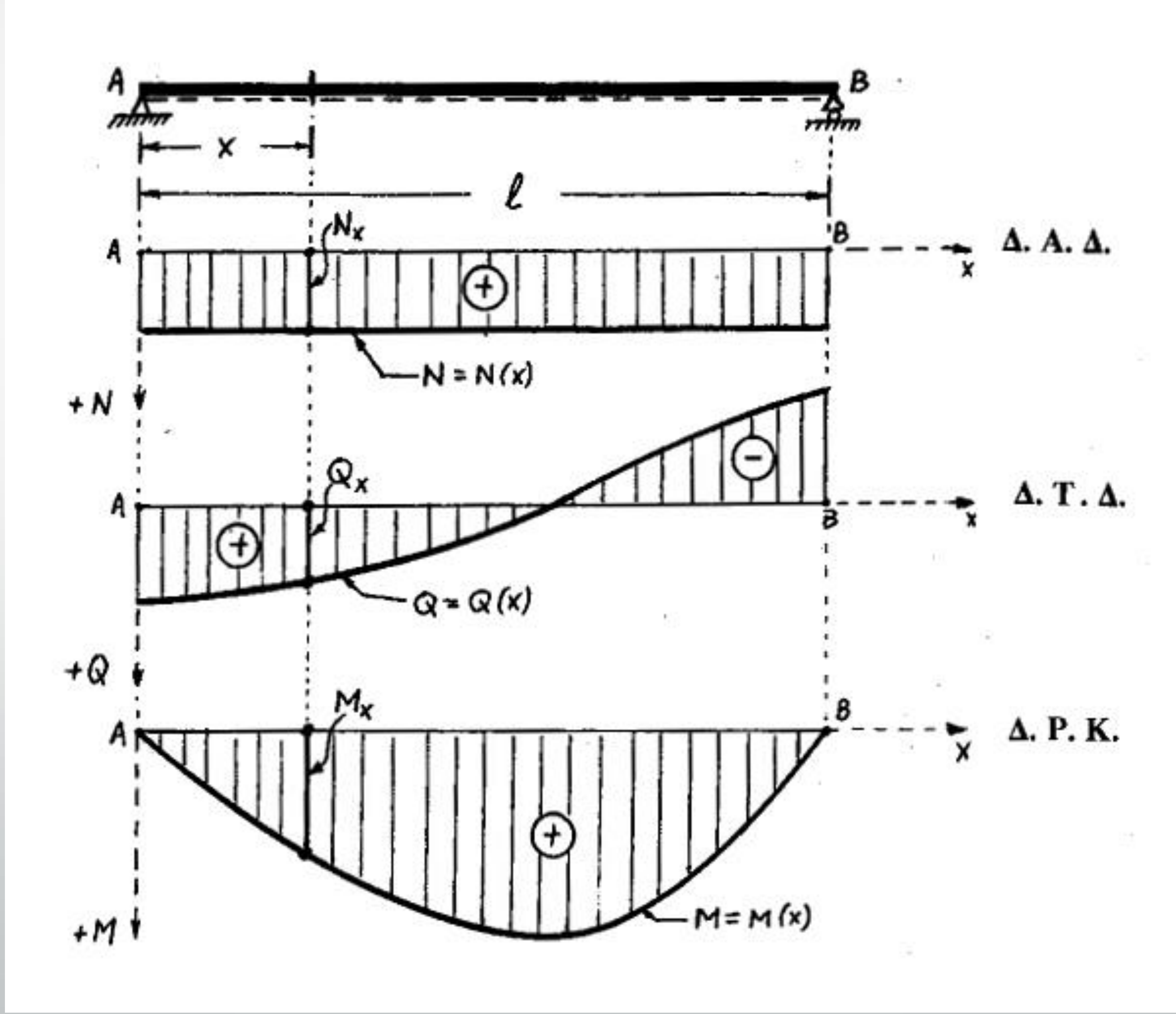


- Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν το σημείο Γ **μόνο**. **Θα θέλαμε όμως την ίδια πληροφορία για όλα τα σημεία του φορέα**. Για αυτόν τον σκοπό φτιάχνουμε **διαγράμματα εσωτερικών εντατικών μεγεθών**.

Διαγράμματα MQN

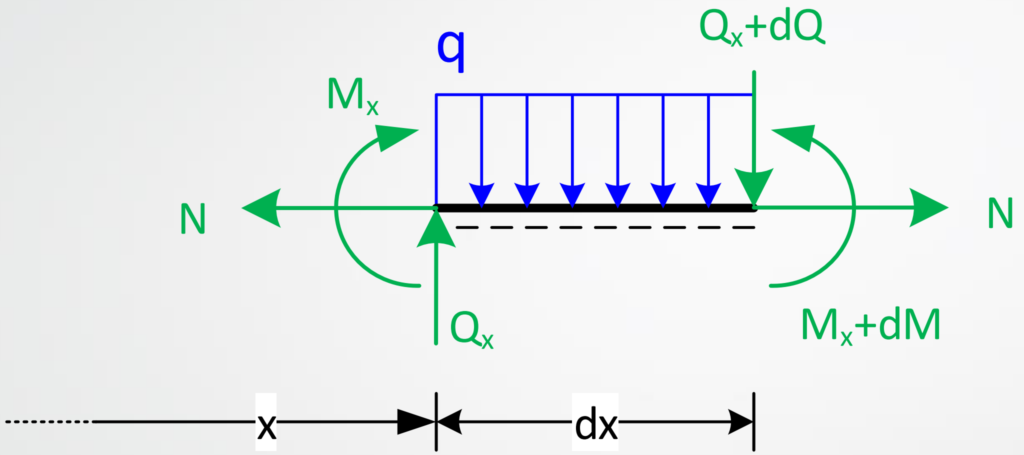
- Κατασκευάζουμε 3 διαγράμματα (για 2D προβλήματα):
- **1. Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων (N)**
- **2. Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (Q)**
- **3. Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών** ή **Διάγραμμα Ροπών Κάμψης (M)**.

(για κάποια απροσδιόριστη φόρτιση)



Διαγράμματα MQN

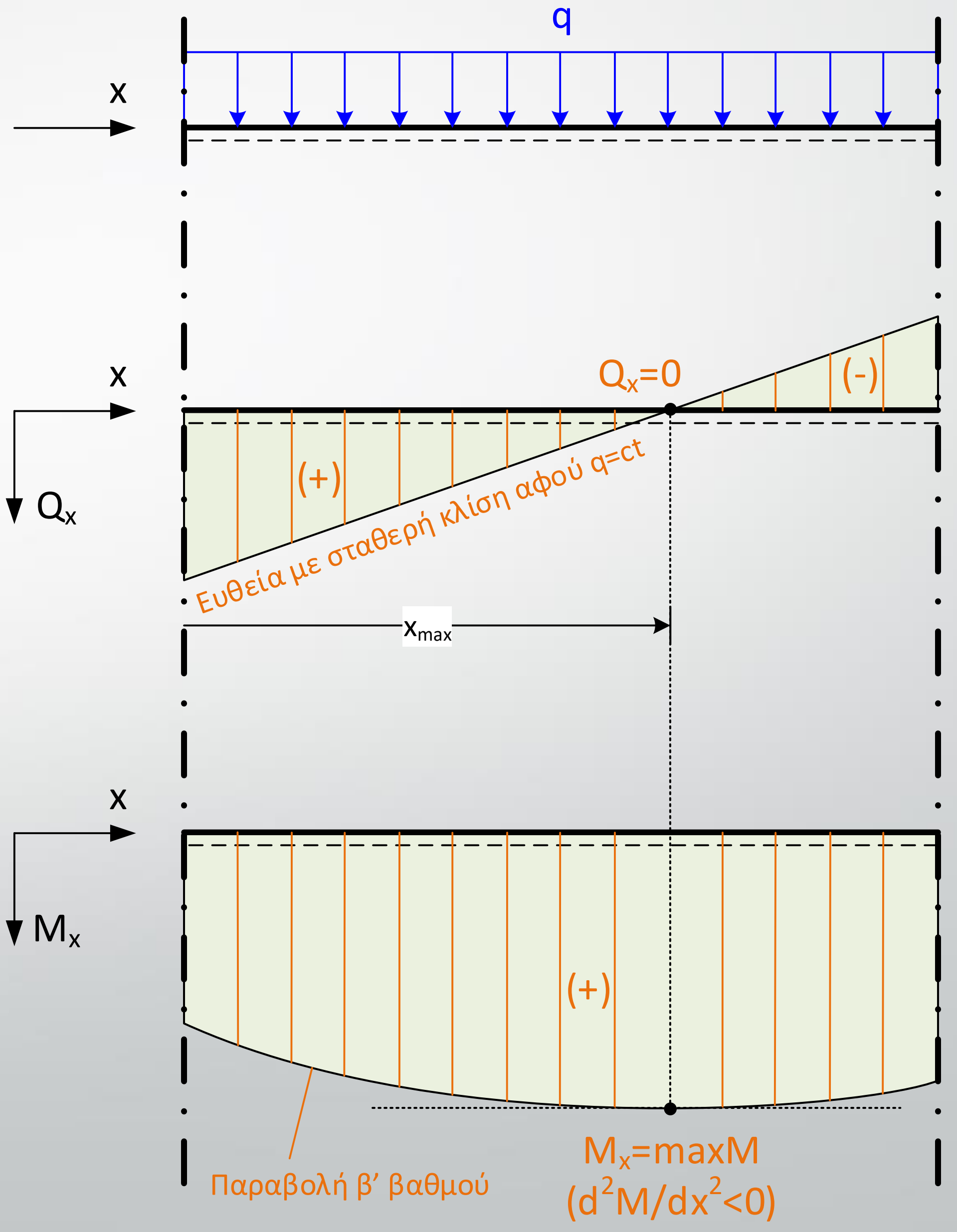
- Σχέση μεταξύ εσωτερικών εντατικών μεγεθών:



- Από $\sum F_y = 0$ προκύπτει: $Q_x - q\,dx - (Q_x + dQ) = 0 \Rightarrow \mathbf{dQ/dx = -q}$ (η q(x) θεωρήθηκε ότι έχει σταθερή τιμή q κατά το μήκος dx).
- Από $\sum M = 0$ γύρω από την δεξιά άκρη: $M_x + Q_x dx - (q\,dx)\,dx/2 - (M_x + dM) = 0 \Rightarrow \mathbf{dM/dx = Q_x}$ (παραλείποντας απειροστά ανώτερης τάξης).

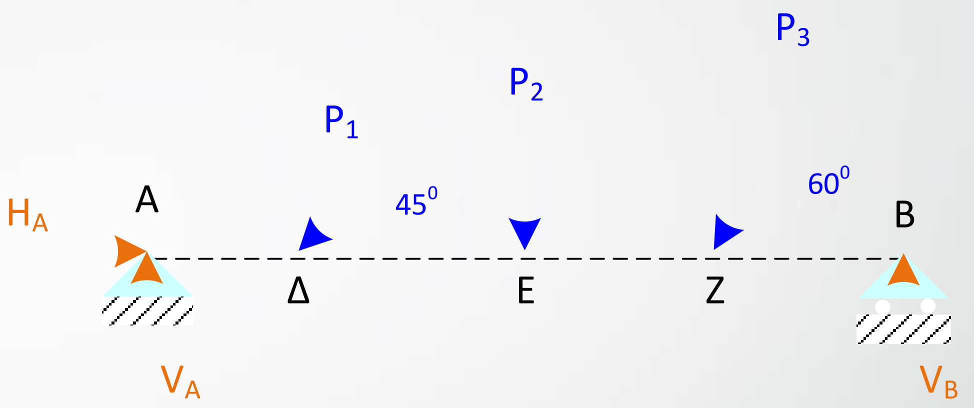
Διαγράμματα MQN

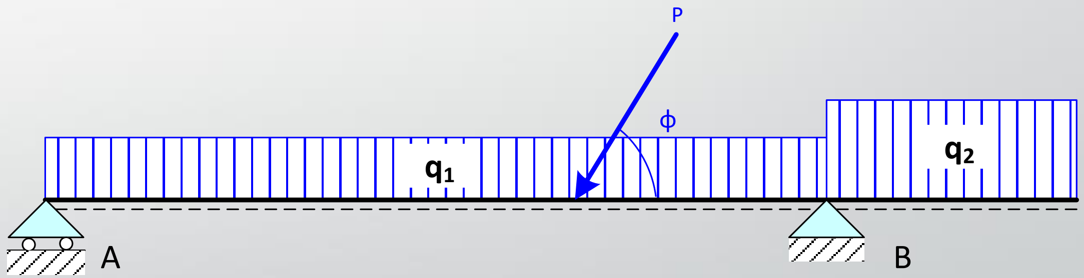
- Συνολικά: $\frac{\mathbf{d^2M(x)}}{\mathbf{dx^2}} = \frac{\mathbf{dQ(x)}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{-q(x)}$
- **Τα διαγράμματα N, Q,** σχεδιάζονται από οποιαδήποτε πλευρά θέλουμε, αλλά **είναι πάντα προσημασμένα**. Συνήθως τα θετικά προς τα κάτω για οριζόντιες δοκούς.
- Τα διαγράμματα M σχεδιάζονται με **τα θετικά πάντα προς την πλευρά της θετικής ίνας**. Συνεπώς σχεδιάζονται πάντα από την πλευρά των εφελκυόμενων ινών λόγω κάμψης.



Διαγράμματα MQN

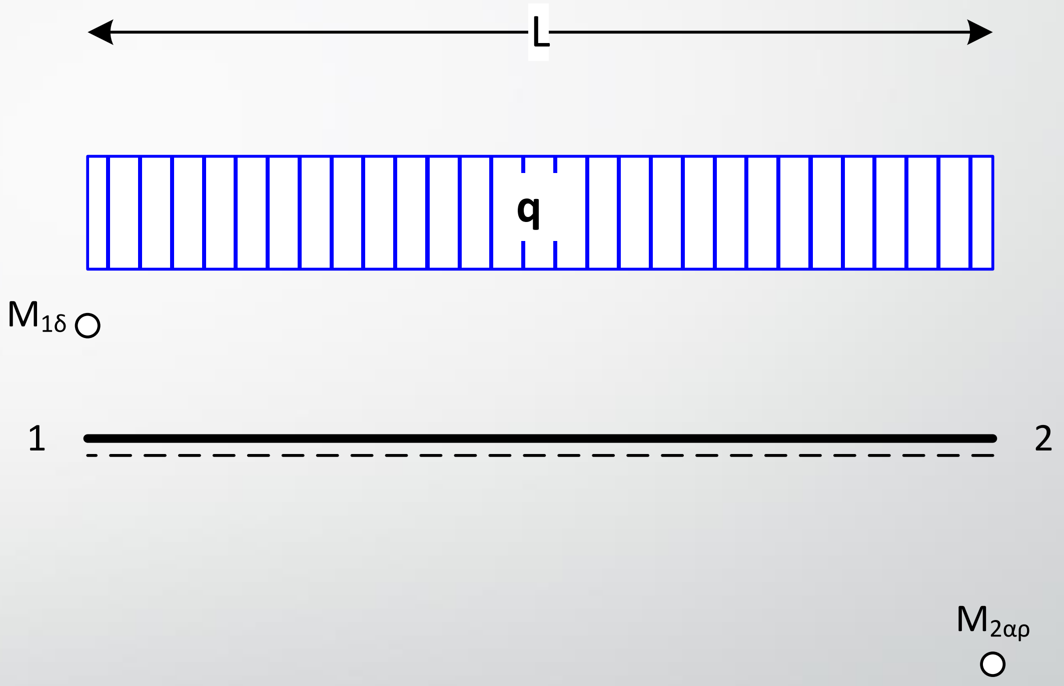
- Είδαμε ότι: $\frac{\mathbf{d^2M(x)}}{\mathbf{dx^2}} = \frac{\mathbf{dQ(x)}}{\mathbf{dx}} = -\mathbf{q(x)}$
- Αυτό σημαίνει ότι:
  - στις περιοχές που q(x)=o, **όπου δηλαδή δεν έχουμε κατανεμημένο φορτίο οποιουδήποτε είδους, αλλά ούτε και συγκεντρωμένες φορτίσεις**, η Q(x) θα είναι σταθερή συνάρτηση και η M(x) γραμμική συνάρτηση.
  - στις περιοχές που έχουμε **ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο** δηλαδή q(x)=ct (σταθερή μη μηδενική συνάρτηση), χωρίς ενδιάμεσες συγκεντρωμένες φορτίσεις, η Q(x) θα είναι γραμμική συνάρτηση και η M(x) δευτέρου βαθμού (με γραφική παράσταση παραβολή).





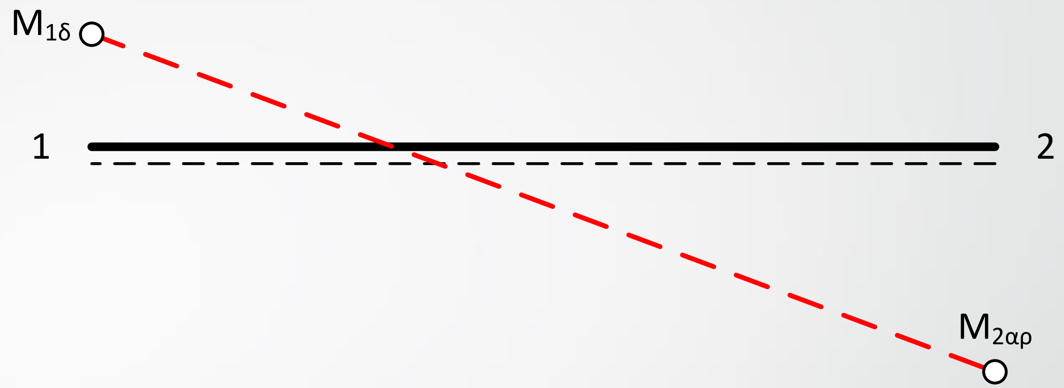
Διαγράμματα ΜQΝ

- **Γραφική σχεδίαση διαγράμματος καμπτικών ροπών δοκού υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο (παραβολή β' βαθμού)**
- Έστω ότι έχουμε τμήμα δοκού μήκους L, από τον κόμβο 1 ως τον κόμβο 2, το οποίο υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q. Δεν θα πρέπει ενδιάμεσα να υπάρχει άλλη φόρτιση (π.χ. συγκεντρωμένο φορτίο). Αν υπάρχει, εφαρμόζεται η σχεδίαση ξεχωριστά στα επιμέρους τμήματα.
- Έστω επίσης ότι έχουμε υπολογίσει τις ακραίες τιμές της καμπτικής ροπής, ήτοι τις $M_{1\delta}$ (λίγο δεξιά του κόμβου 1) και $M_{2\alpha\rho}$ (λίγο αριστερά του κόμβου 2).

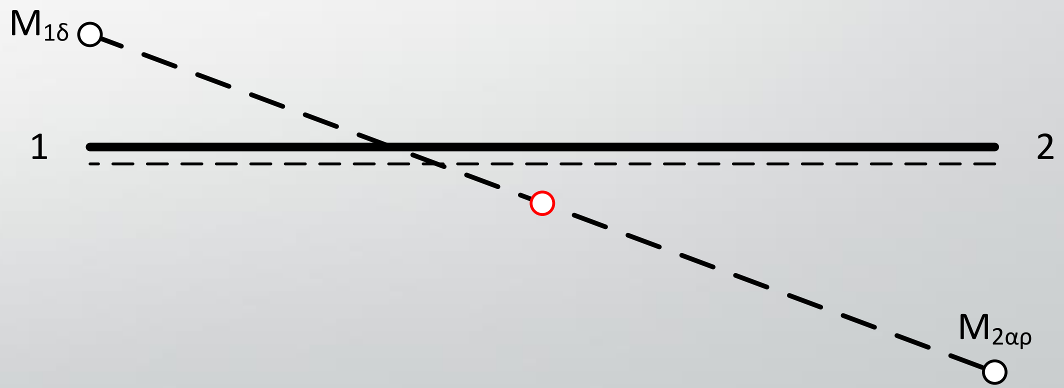


Διαγράμματα ΜQΝ

- Ενώνουμε την $M_{1\delta}$ με την $M_{2\alpha\rho}$.

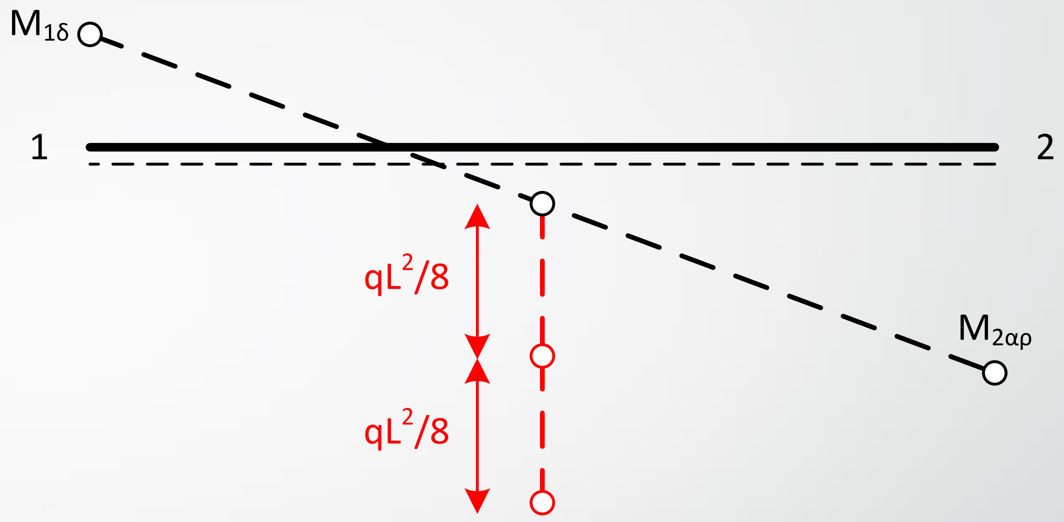


- Βρίσκουμε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που σχεδιάσαμε.

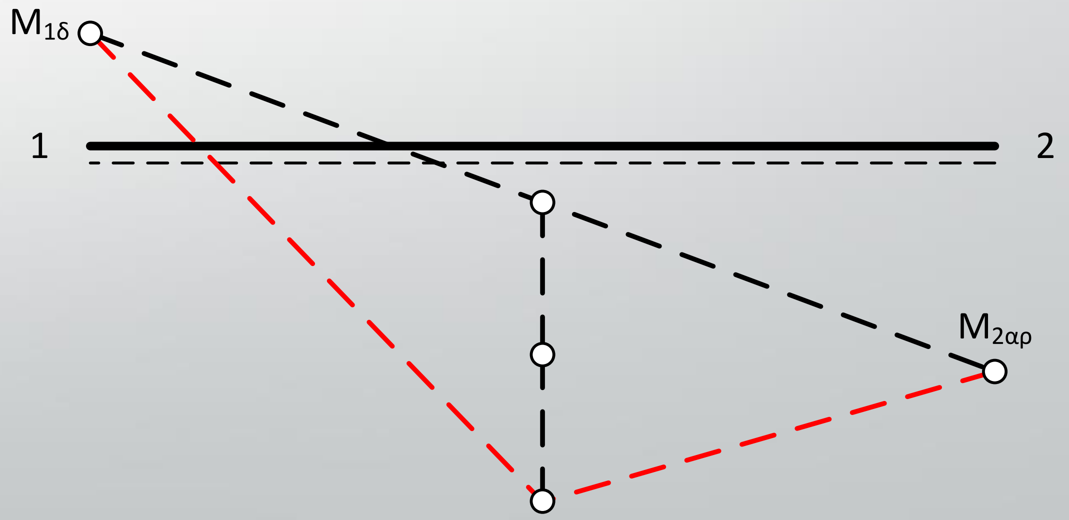


Διαγράμματα ΜQΝ

- Από αυτό το σημείο αναρτούμε **δύο φορές** με την κατεύθυνση του κατανεμημένου φορτίου (συνήθως από πάνω προς τα κάτω, αν πρόκειται για φορτία βαρύτητας) την ποσότητα **$qL^2/8$** (με κατάλληλη κλίμακα, αφού έχει διαστάσεις καμπτικής ροπής):

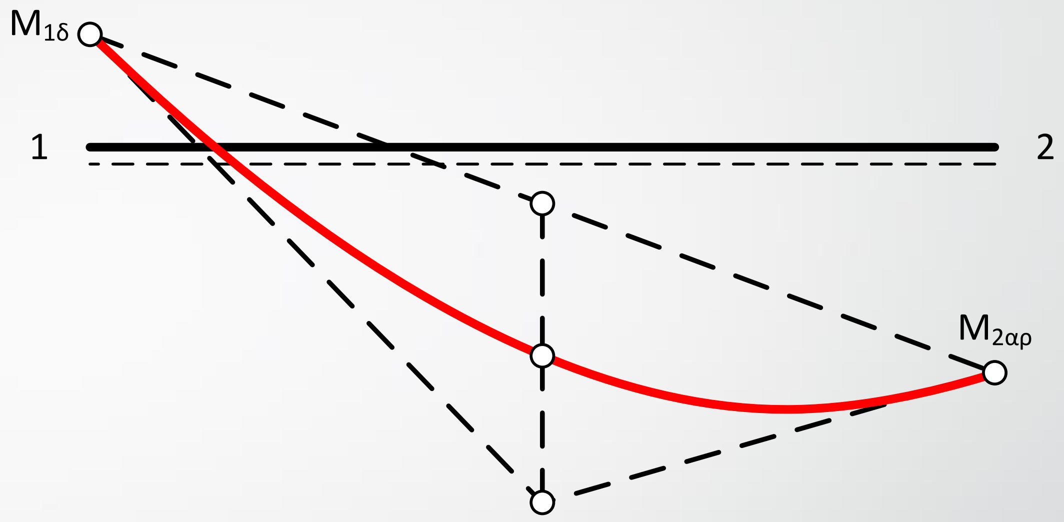


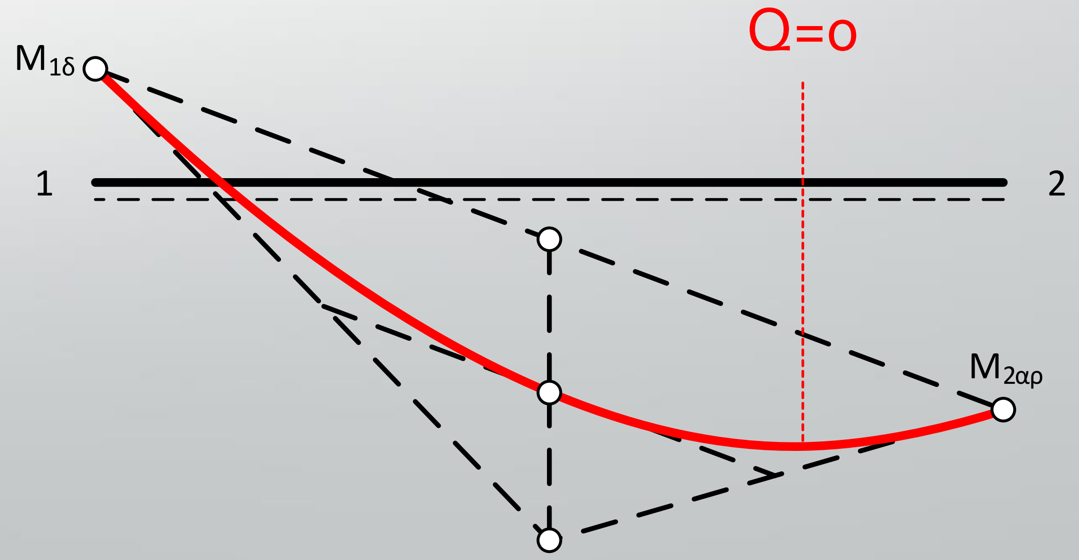
- Ενώνουμε το τελικό σημείο με τα σημεία $M_{1\delta}$ και $M_{2\alpha\rho}$ με διακεκομμένη γραμμή.



Διαγράμματα MQN

- Το τελικό διάγραμμα σχεδιάζεται **εφαπτομενικά** στις γραμμές που τραβήξαμε και διέρχεται από το ενδιάμεσο σημείο.
- Για καλύτερα αποτελέσματα, μπορούμε να σχεδιάσουμε και την παράλληλη που διέρχεται από το ενδιάμεσο σημείο. Η καμπύλη θα είναι εφαπτόμενη και σε αυτήν την βοηθητική ευθεία.
- Το σημείο μηδενισμού του διαγράμματος των τεμνουσών (αν υπάρχει) ταυτίζεται με το τοπικό ακρότατο του διαγράμματος των καμπτικών ροπών (αν υπάρχει).

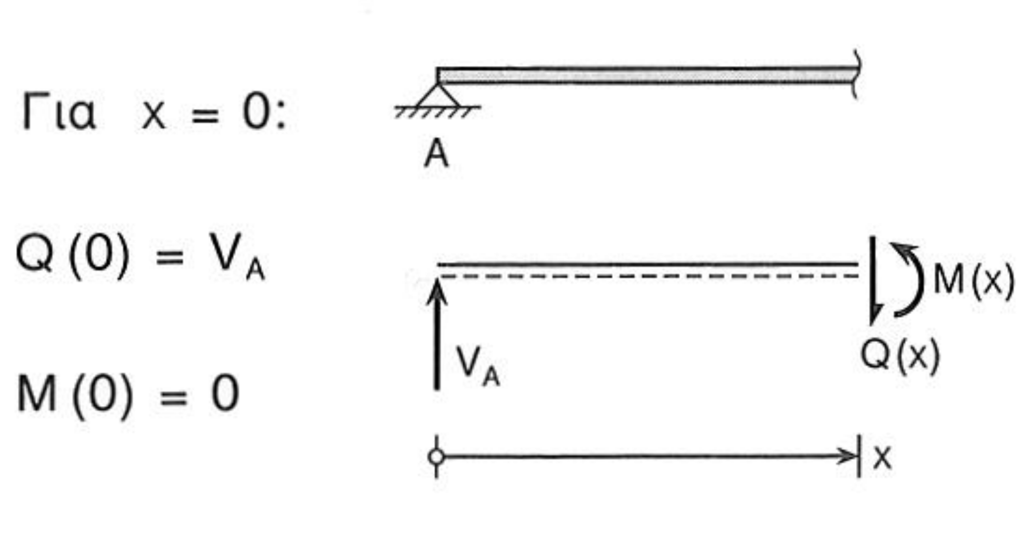




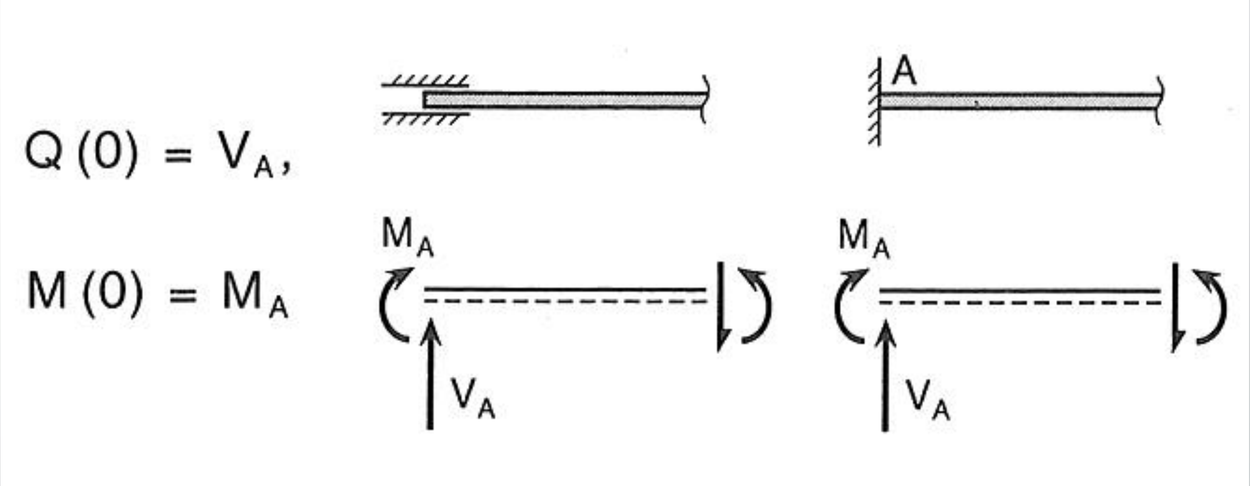
Διαγράμματα MQN

- Κατά την ολοκλήρωση προκύπτουν δύο σταθερές ολοκλήρωσης: $Q_o=Q(o)$ και $M_o=M(o)$. Αυτές πρέπει να προσδιοριστούν από ισάριθμες **συνοριακές συνθήκες.**

(άρθρωση ή κύλιση χωρίς εξωτερικά εφαρμοζόμενη συγκεντρωμένη ροπή εκεί)



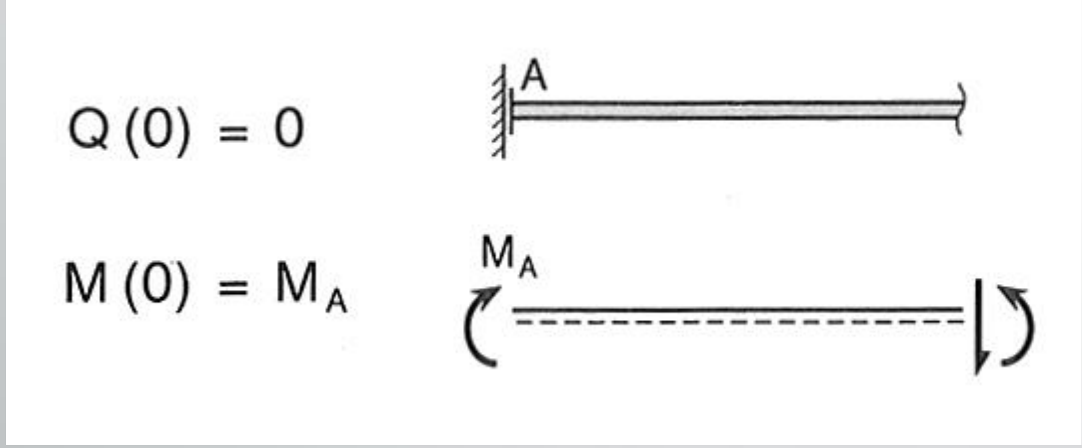
(διαμήκης οδηγός - πάκτωση)



Διαγράμματα MQN

- Κατά την ολοκλήρωση προκύπτουν δύο σταθερές ολοκλήρωσης: $Q_o=Q(o)$ και $M_o=M(o)$. Αυτές πρέπει να προσδιοριστούν από ισάριθμες **συνοριακές συνθήκες.**

(εγκάρσιος οδηγός,
δηλαδή κυλιόμενη πάκτωση)



(ελεύθερο άκρο χωρίς εξωτερικά εφαρμοζόμενη
συγκεντρωμένη δύναμη ή ροπή εκεί)