

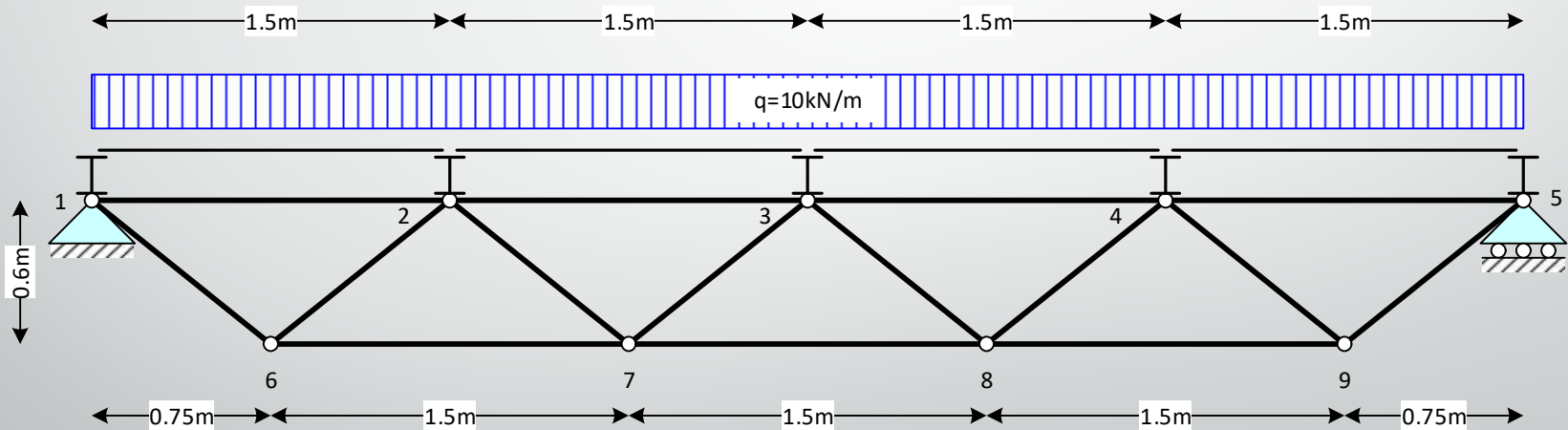


Ασκήσεις

Δικτυώματα

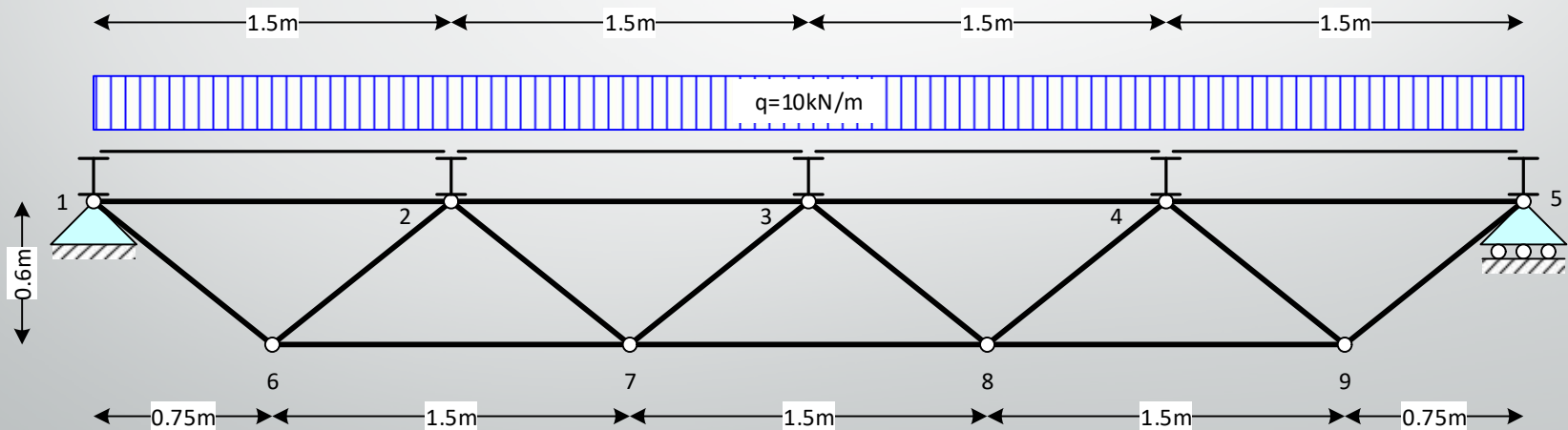
Άσκηση 4.1

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών του.



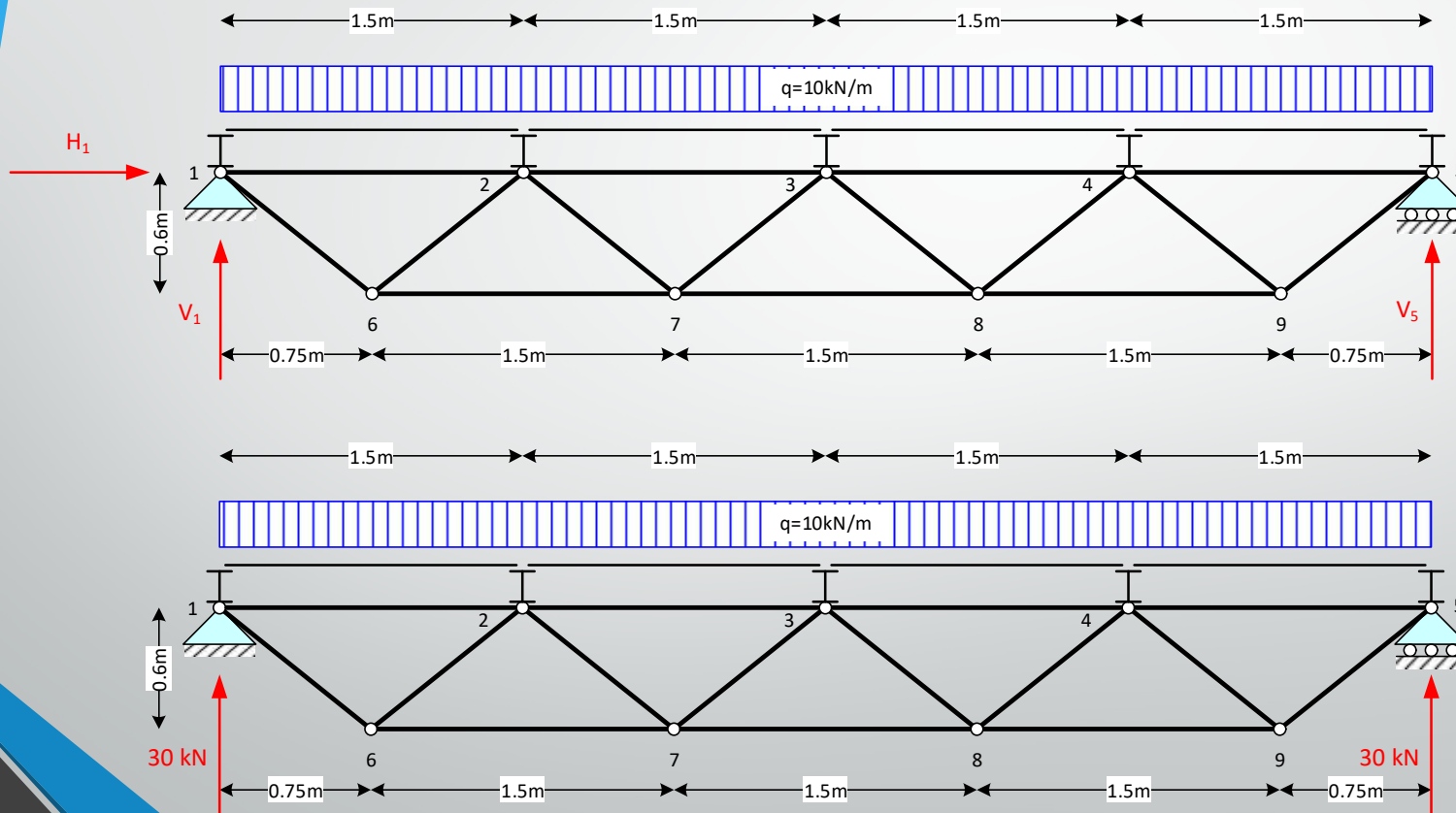
Άσκηση 4.1

- Το δικτύωμα είναι αμφιέρειστα στηριγμένο (εξωτερικά ισοστατικό).
- Ισχύει η σχέση $\rho = 2\kappa - 3$ αφού $\rho = 15$, $\kappa = 9$. Εσωτερικά είναι ευσταθές ως παράθεση τριγώνων χωρίς επικάλυψη, άρα είναι και εσωτερικά ισοστατικό.
- Θεωρείται ότι τα μέλη είναι αβαρή, οι αρθρώσεις λειτουργούν χωρίς τριβές, ενώ η φόρτιση γίνεται επί των κόμβων 1 ως 5, μέσω έμμεσης στήριξης επί διαδοκίδων.



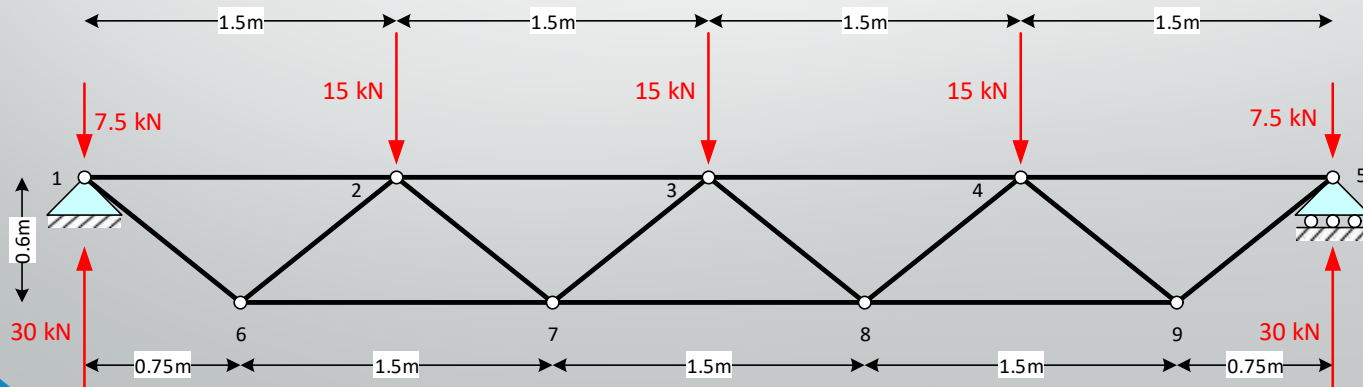
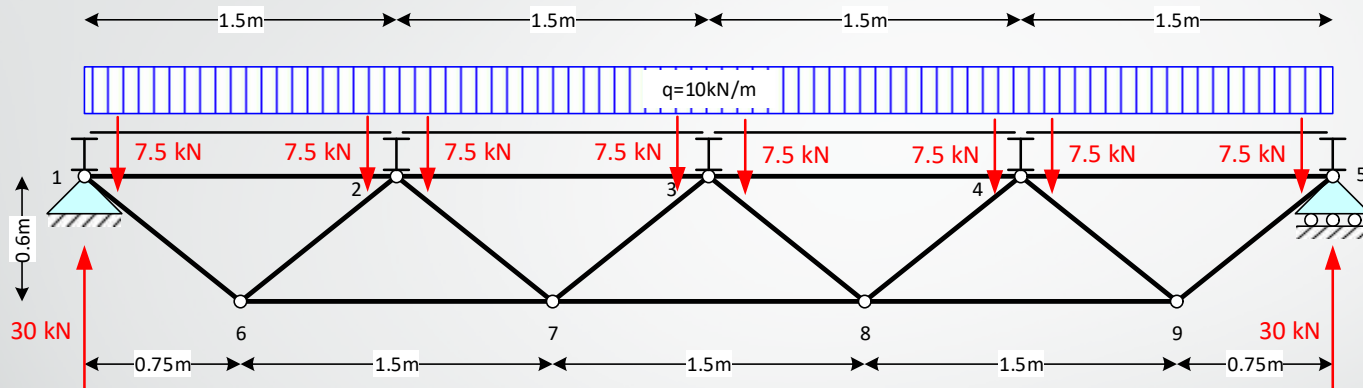
Άσκηση 4.1

■ Εύρεση αντιδράσεων



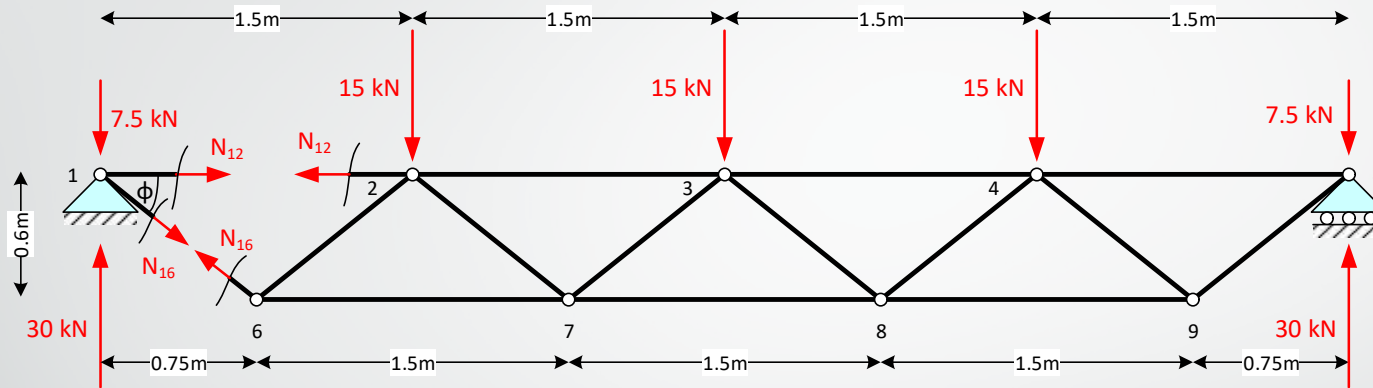
Άσκηση 4.1

- Εύρεση επικόμβιων φορτίων από την έμμεση φόρτιση



Άσκηση 4.1

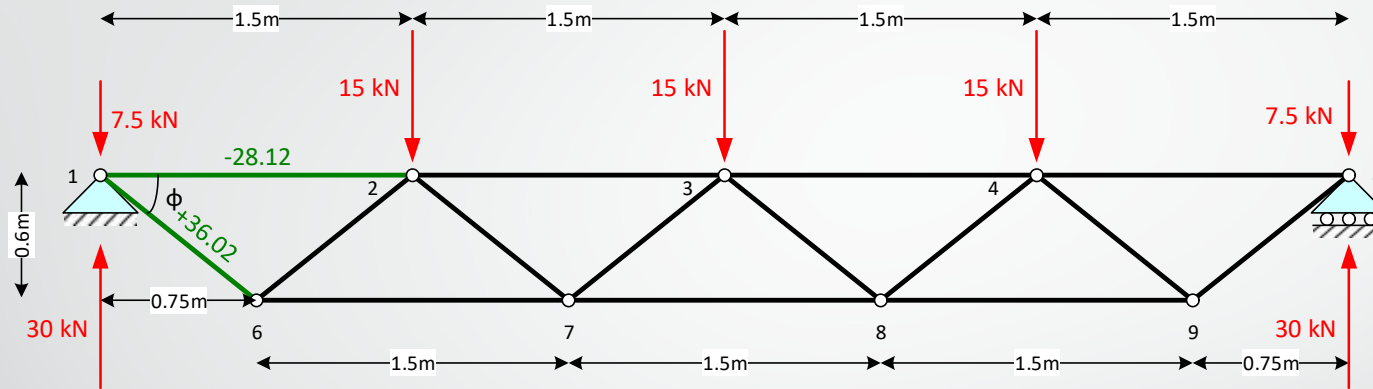
- Ισορροπία κόμβου 1.



- $\phi = \arctan(0.6/0.75) = 38.66^\circ$.
- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{12} + N_{16} \cos(\phi) = 0$
- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 30 - N_{16} \sin(\phi) - 7.5 = 0 \Rightarrow N_{16} = +36.02 \text{ kN}$
- Προκύπτει $N_{12} = -N_{16} \cos(\phi) = -36.02 \times 0.781 = -28.13 \text{ kN}$

Άσκηση 4.1

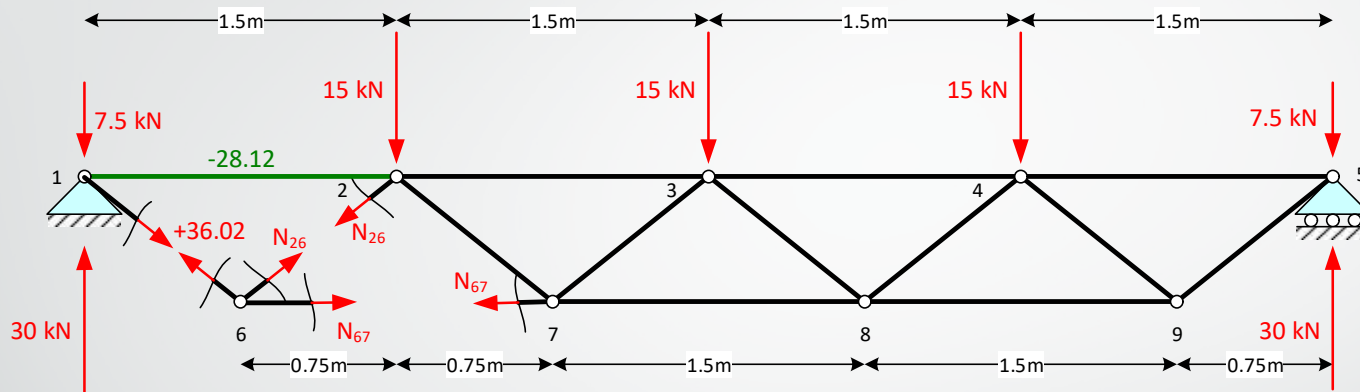
- Ισορροπία κόμβου 1.



- Επόμενη ισορροπία κόμβου 6 (δύο άγνωστοι: N_{26} , N_{67} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).
- Δεν θα μπορούσα να προχωρήσω με τον κόμβο 2 (τρεις άγνωστοι: N_{23} , N_{27} , N_{26} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).

Άσκηση 4.1

- Ισορροπία κόμβου 6.



- Πάντα, όπου κάνουμε τομή, είναι καλό να βάζουμε την άγνωστη δύναμη ως εφελκυστική (με φορά προς τον απέναντι κόμβο).

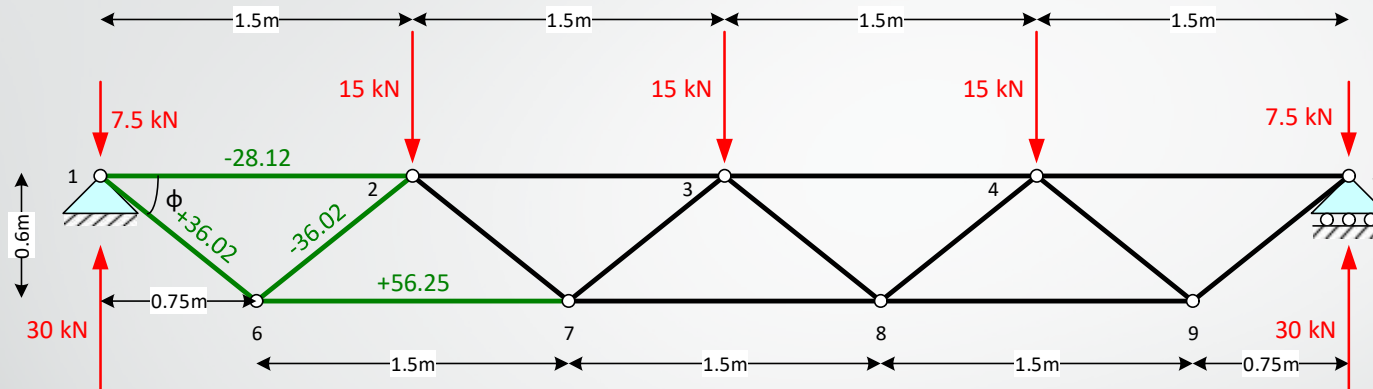
- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{67} + N_{26} \cos(\varphi) - 36.02 \cos(\varphi) = 0$

- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{26} \sin(\varphi) + 36.02 \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{26} = -36.02 \text{ kN}$

Προκύπτει $N_{67} - 36.02 \cos(\varphi) - 36.02 \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{67} = +56.25 \text{ kN}$

Άσκηση 4.1

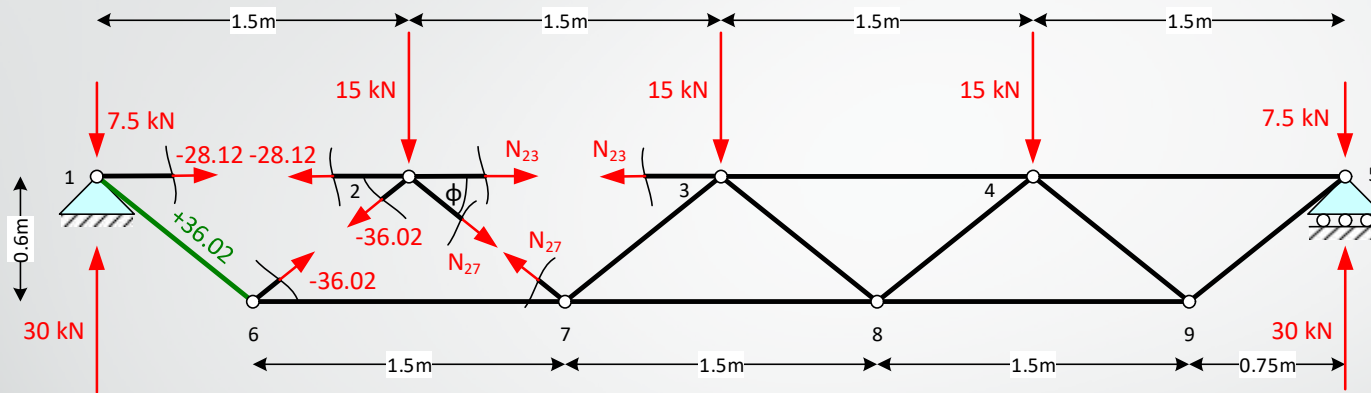
- Ισορροπία κόμβου 6.



- Επόμενη ισορροπία κόμβου 2 (δύο άγνωστοι: N_{23} , N_{27} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).
- Δεν θα μπορούσα να προχωρήσω με τον κόμβο 7 (τρεις άγνωστοι: N_{27} , N_{37} , N_{78} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).

Άσκηση 4.1

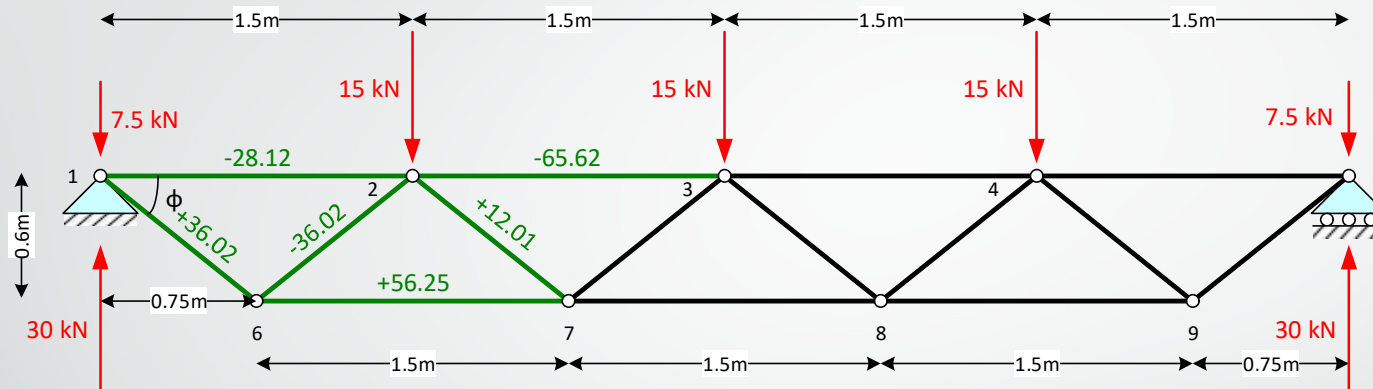
- Ισορροπία κόμβου 2.



- Είναι πιο εύκολο, όπου κάνουμε τομή, να βάζουμε την δύναμη με φορά προς τον απέναντι κόμβο. Αν είναι γνωστή και θλιπτική, η τιμή της θα είναι αρνητική.
 - $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{23} - (-28.12) - (-36.02)\cos(\varphi) + N_{27}\cos(\varphi) = 0$
 - $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_{27}\sin(\varphi) - (-36.02)\sin(\varphi) - 15 = 0 \Rightarrow N_{27} = +12.01\text{kN}$
- Άρα $N_{23} + 28.12 + 36.02\cos(\varphi) + 12.01\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{23} = -65.62\text{kN}$

Άσκηση 4.1

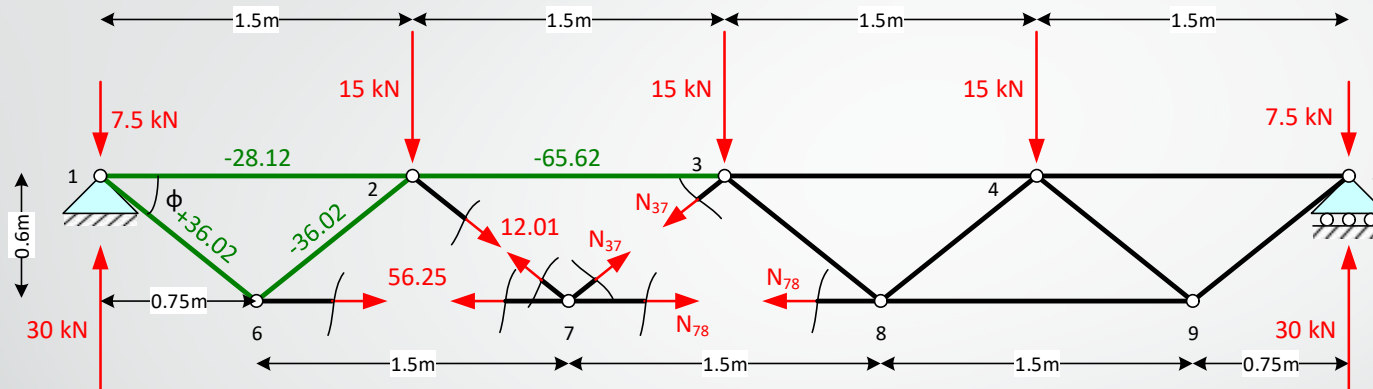
- Ισορροπία κόμβου 2.



- Επόμενη ισορροπία κόμβου 7 (δύο άγνωστοι: N_{37} , N_{78} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).
- Δεν θα μπορούσα να προχωρήσω με τον κόμβο 3 (τρεις άγνωστοι: N_{37} , N_{38} , N_{34} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).

Άσκηση 4.1

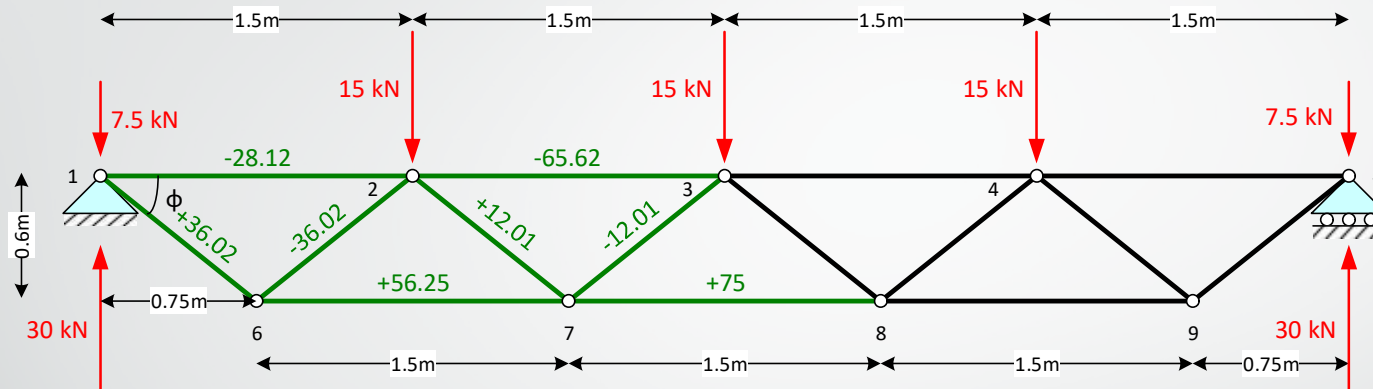
- Ισορροπία κόμβου 7.



- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{78} - 56.25 - 12.01\cos(\varphi) + N_{37}\cos(\varphi) = 0$
- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{37}\sin(\varphi) + 12.01\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{37} = -12.01\text{kN}$
- Άρα $N_{78} - 56.25 - 12.01\cos(\varphi) - 12.01\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{78} = +75\text{kN}$

Άσκηση 4.1

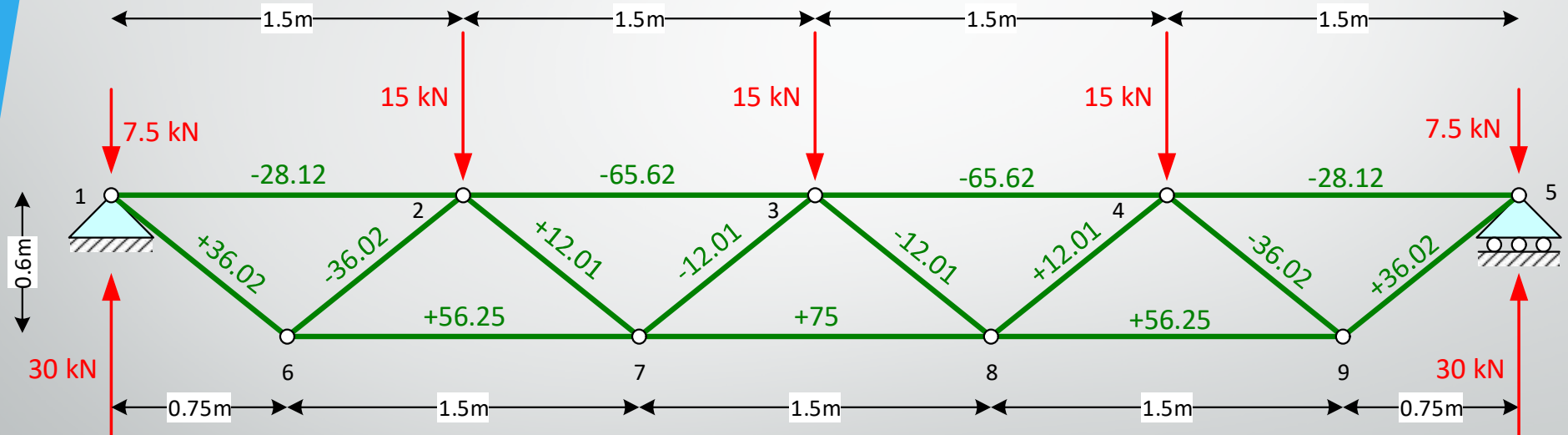
- Ως τώρα έχουμε βρει:



- Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο.
- Ή:

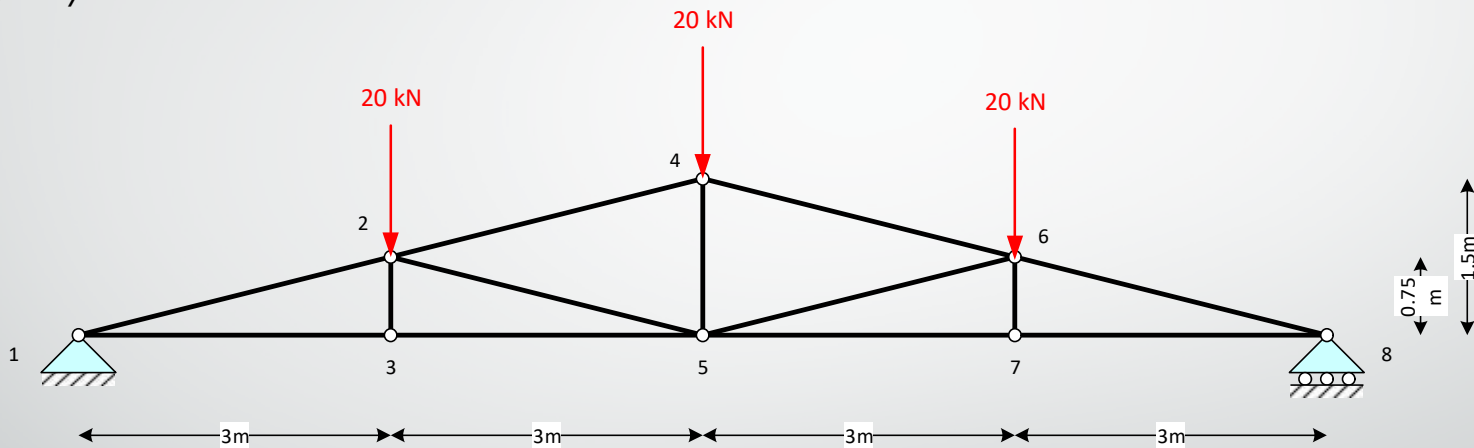
Άσκηση 4.1

- Λόγω συμμετρίας φορέα ΚΑΙ φόρτισης, συμπληρώνω συμμετρικά τα υπόλοιπα:



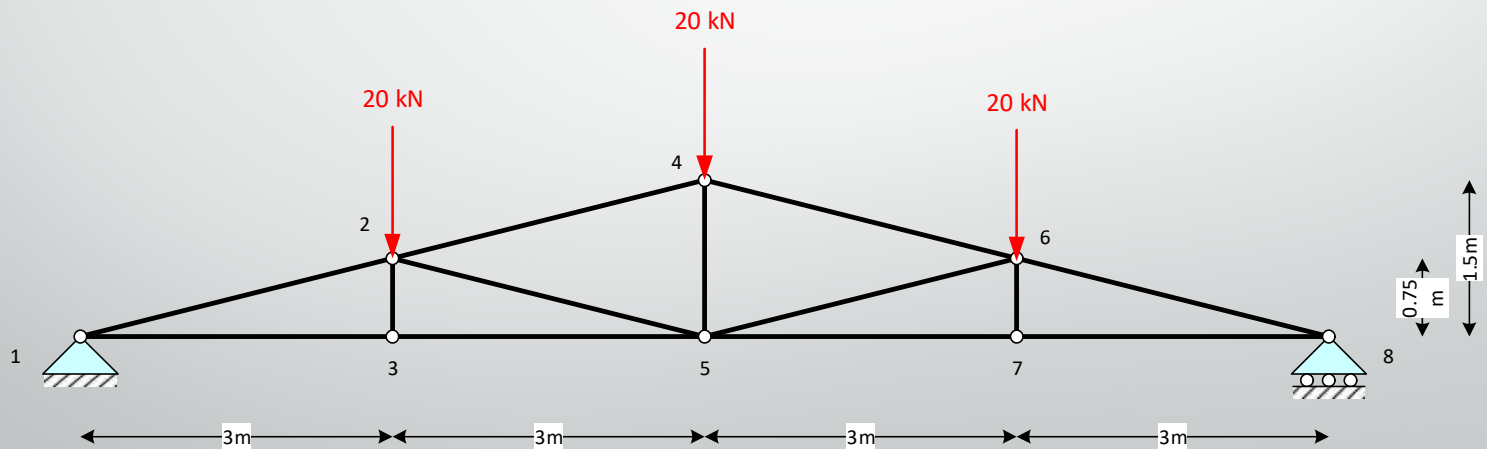
Άσκηση 4.2

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών του άνω πέλματος (N_{12} , N_{24} , N_{46} , N_{68}) και κάτω πέλματος (N_{13} , N_{35} , N_{57} , N_{78}) με χρήση τομών Ritter.



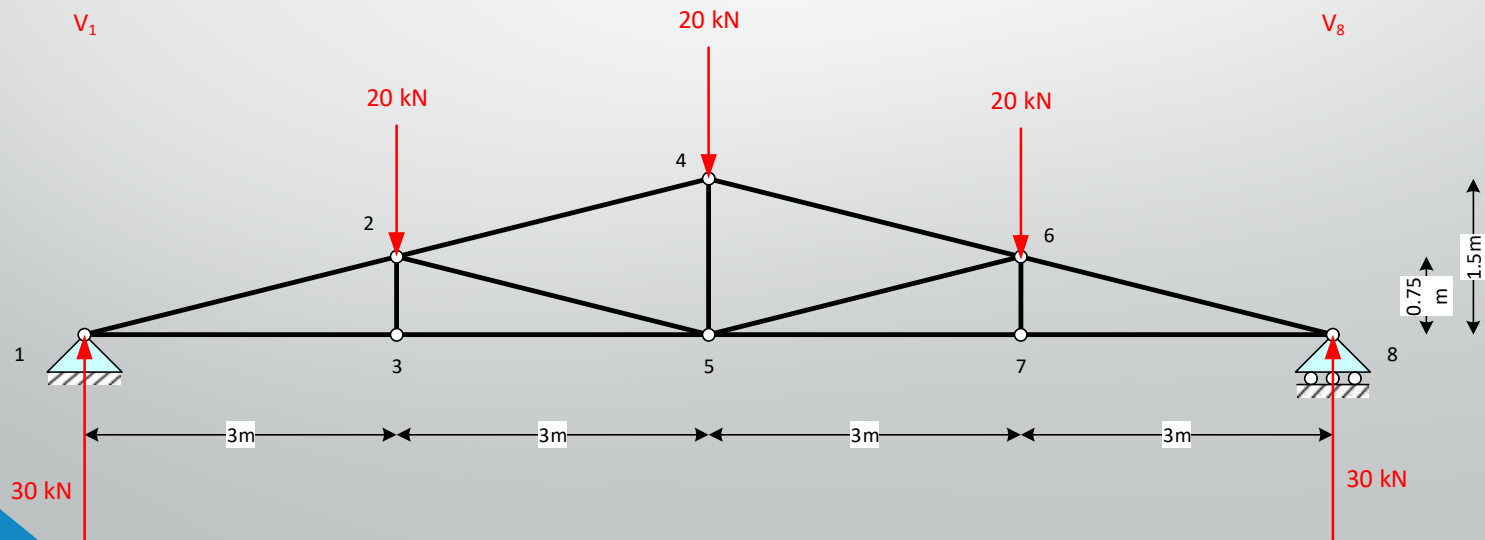
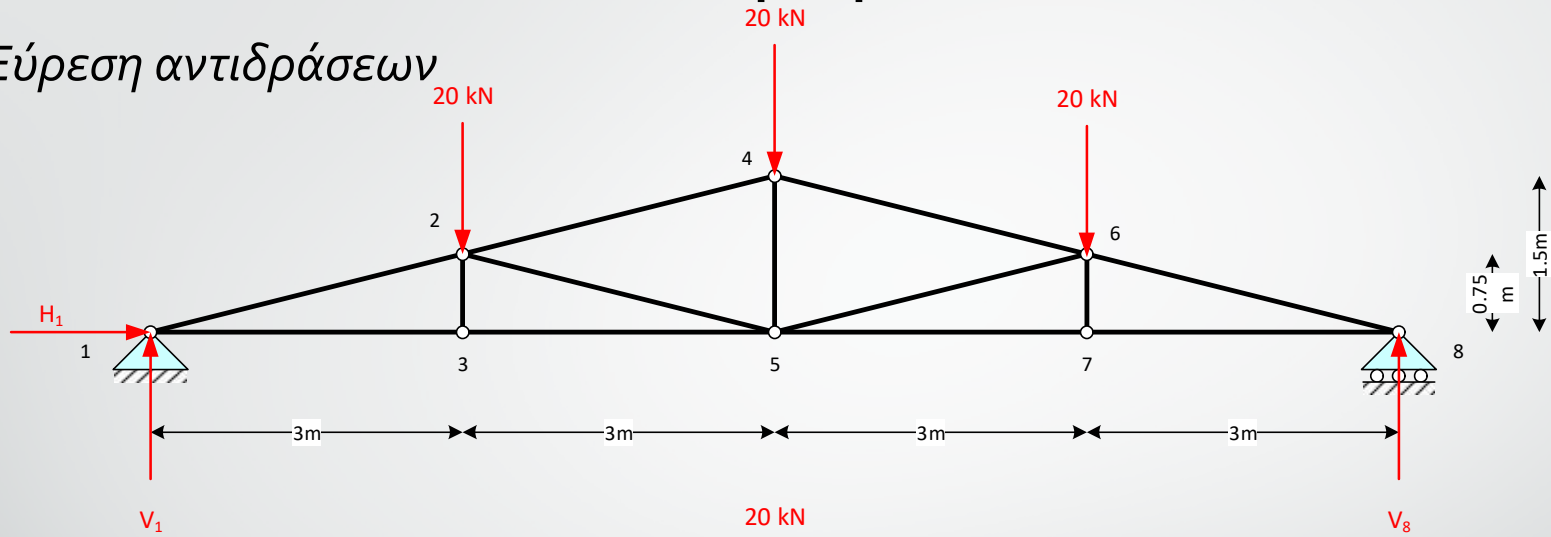
Άσκηση 4.2

- Το δικτύωμα είναι αμφιέρειστα στηριγμένο (εξωτερικά ισοστατικό).
- Ισχύει η σχέση $\rho = 2\kappa - 3$ αφού $\rho = 13$, $\kappa = 8$. Εσωτερικά είναι ευσταθές ως παράθεση τριγώνων χωρίς επικάλυψη, άρα είναι και εσωτερικά ισοστατικό.
- Θεωρείται ότι τα μέλη είναι αβαρή και οι αρθρώσεις λειτουργούν χωρίς τριβές.



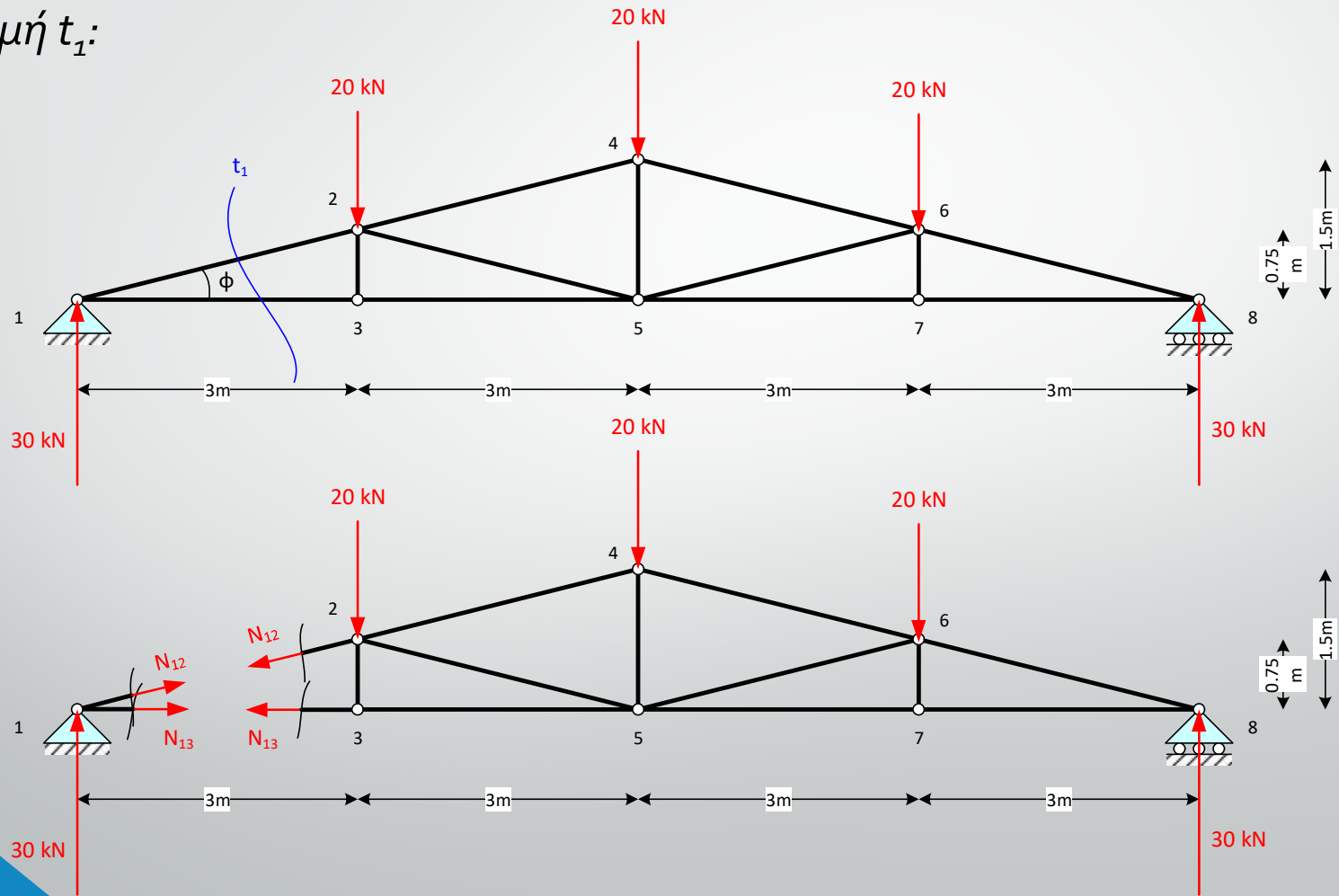
Άσκηση 4.2

- Εύρεση αντιδράσεων



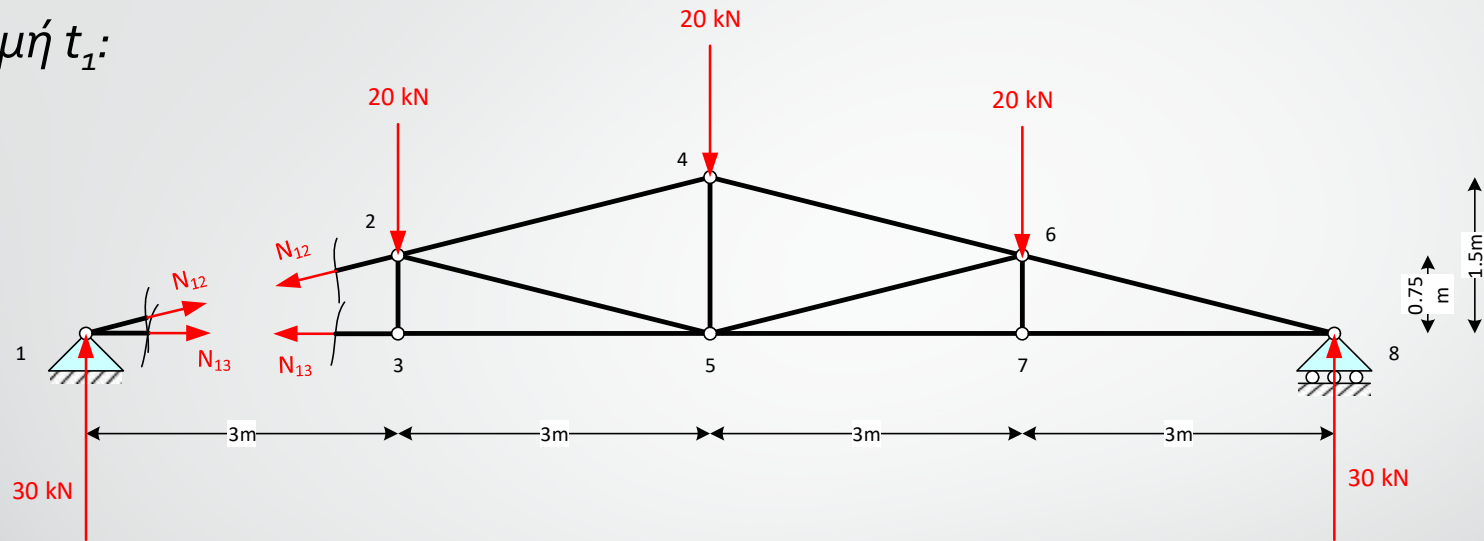
Άσκηση 4.2

■ Τομή t_1 :



Άσκηση 4.2

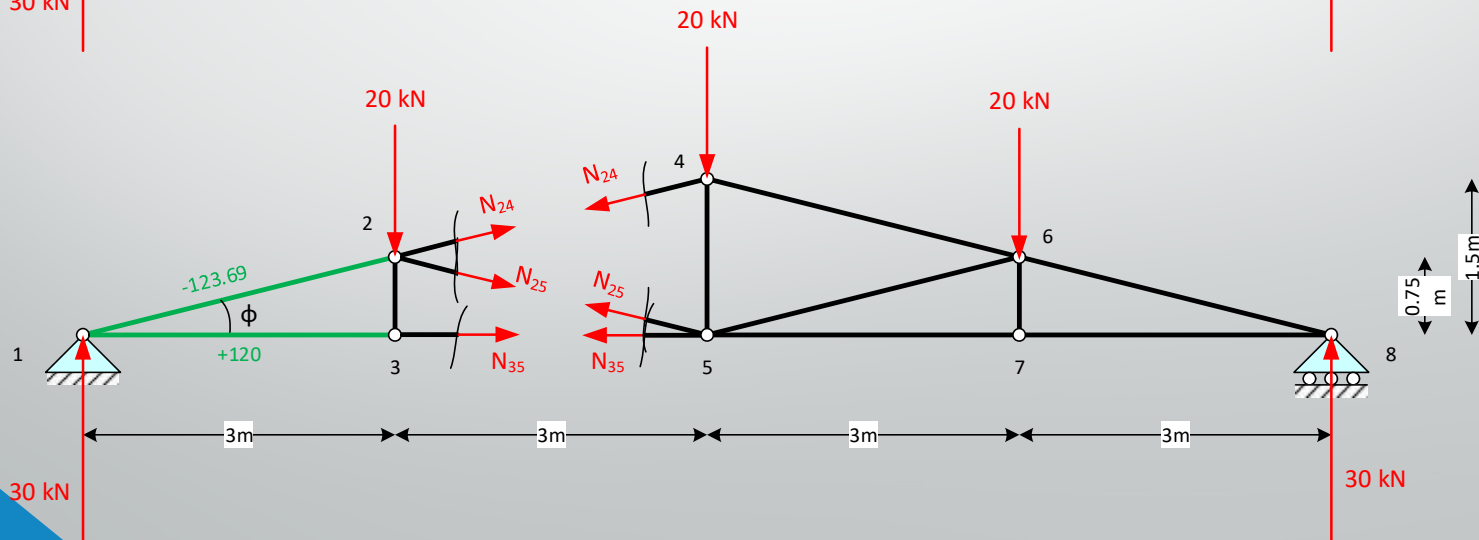
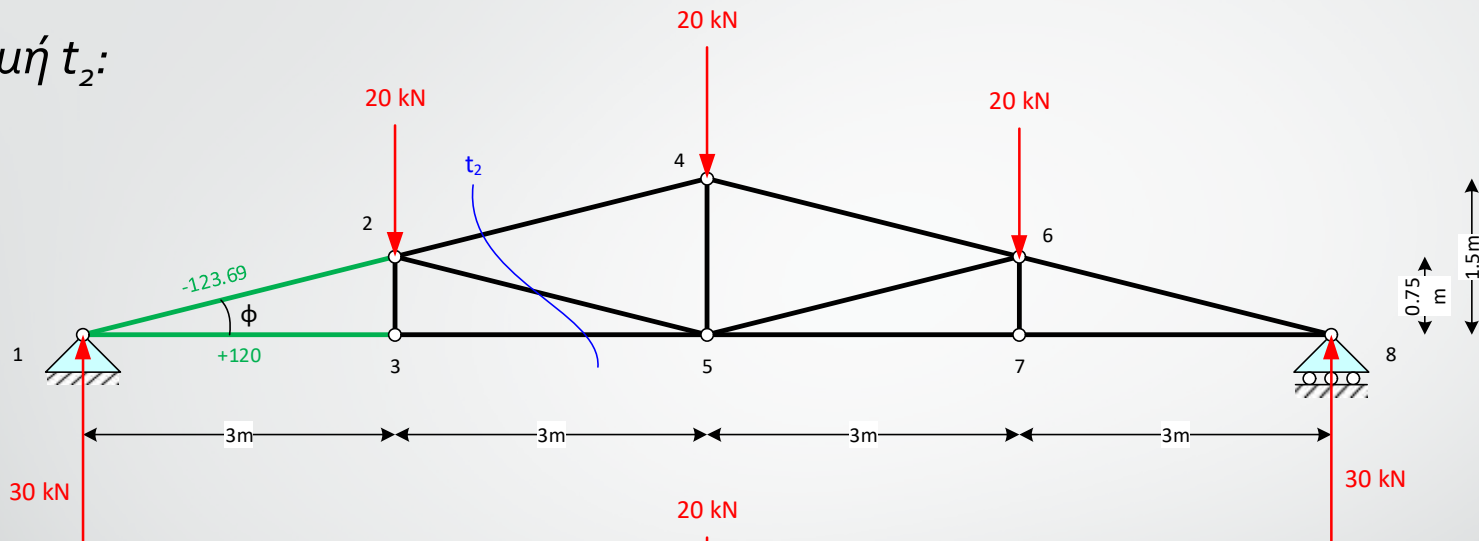
- Τομή t_1 :



- $\varphi = \arctan\left(\frac{1.5}{6}\right) \Rightarrow \varphi \cong 14.036^\circ$
- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{13} + N_{12}\cos(\varphi) = 0$
- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{12}\sin(\varphi) + 30 = 0 \Rightarrow N_{12} = -123.69\text{kN}$
- Προκύπτει $N_{13} - 123.69\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{13} = +120\text{kN}$

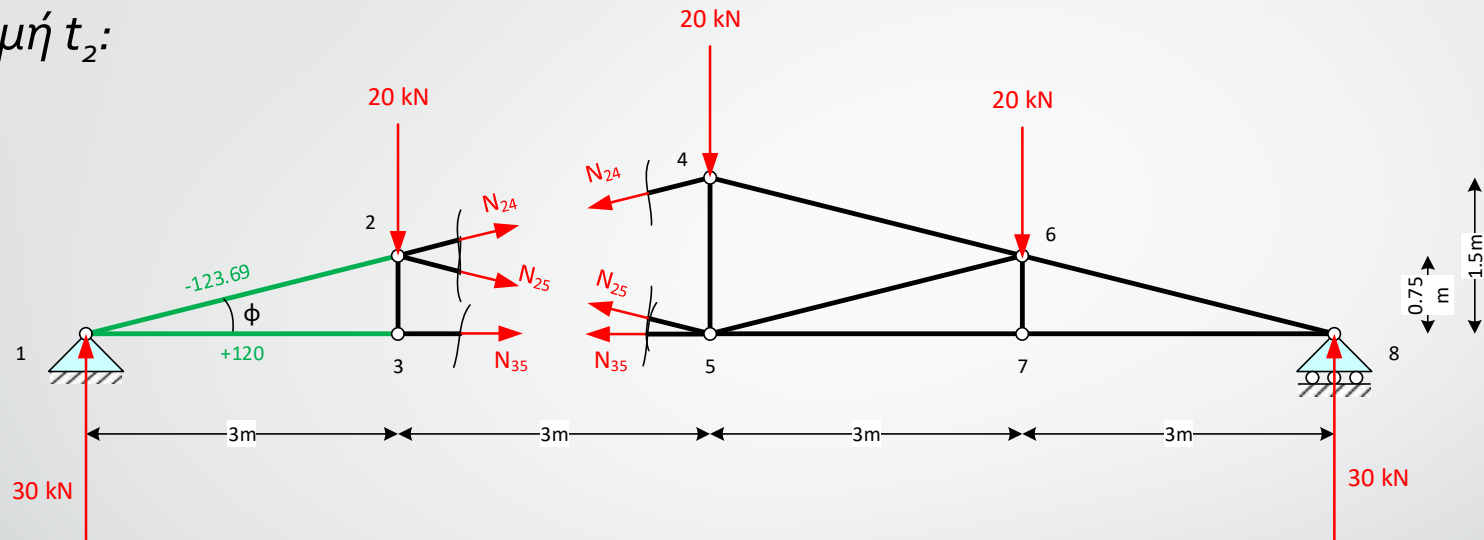
Άσκηση 4.2

■ Τομή t_2 :



Άσκηση 4.2

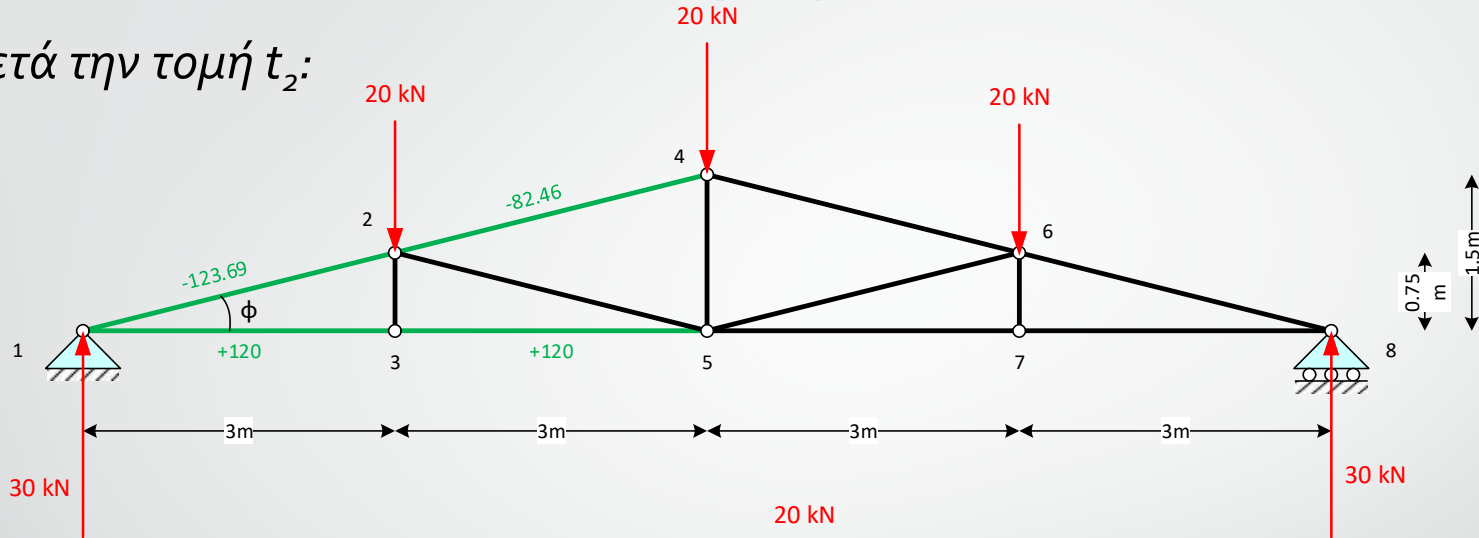
- Τομή t_2 :



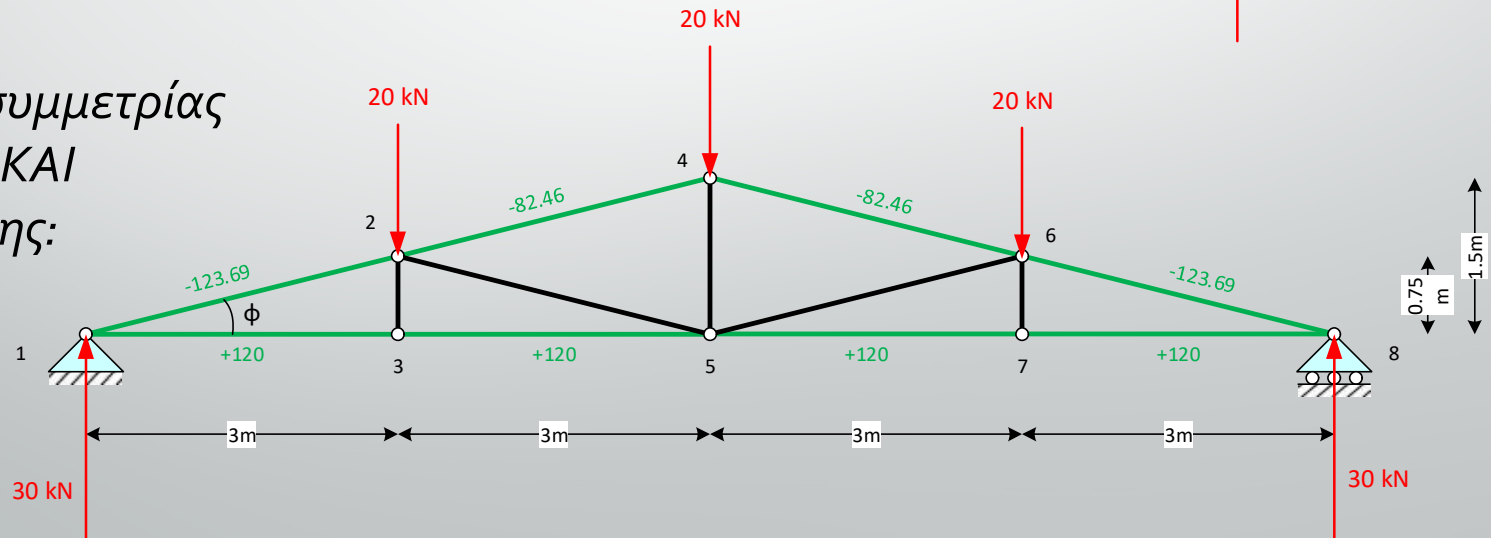
- $\sum M_{(1)} = 0 \xrightarrow{+\Sigma\Delta\Omega} N_{25} \cos(\varphi) \times 0.75 + N_{25} \sin(\varphi) \times 3 + 20 \times 3 = 0 \Rightarrow N_{25} = -41.23 \text{ kN}$ (Όπου χρησιμοποιείται στην συνέχεια το N_{25} βάζω -41.23)
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{25} \sin(\varphi) + N_{24} \sin(\varphi) + 30 - 20 = 0 \Rightarrow N_{24} = -82.46 \text{ kN}$
- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{25} \cos(\varphi) + N_{24} \cos(\varphi) + N_{35} = 0 \Rightarrow N_{35} = +120 \text{ kN}$

Άσκηση 4.2

■ Μετά την τομή t_2 :

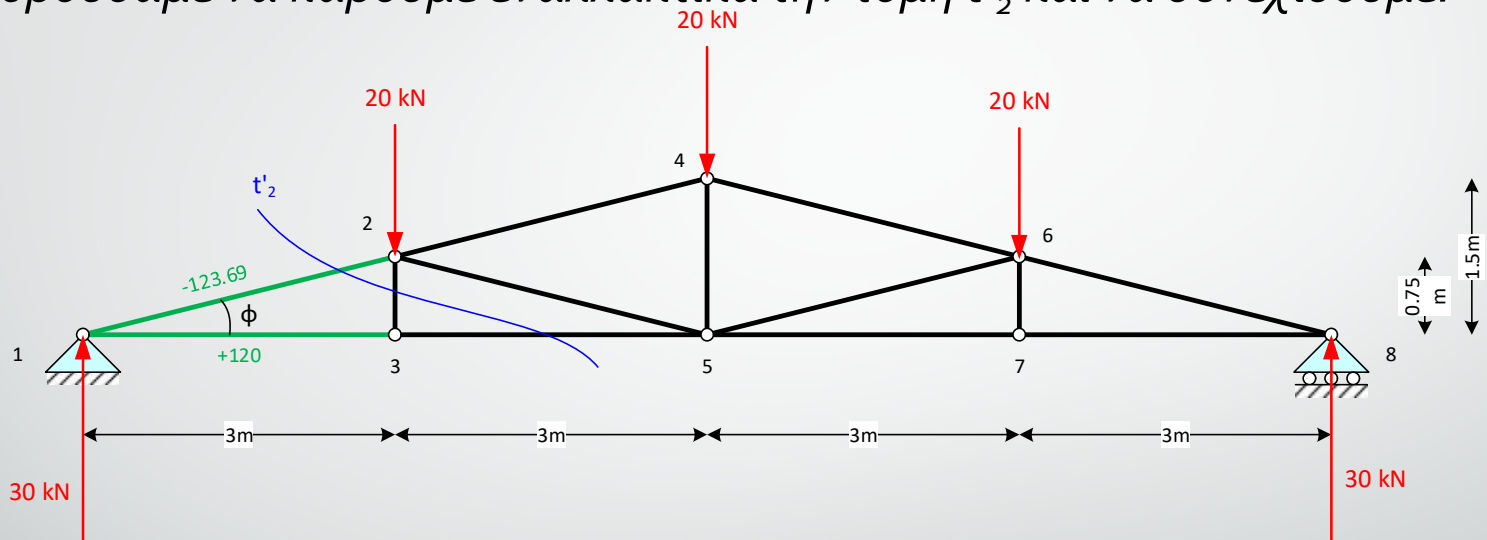


■ Λόγω συμμετρίας φορέα ΚΑΙ φόρτισης:



Άσκηση 4.2

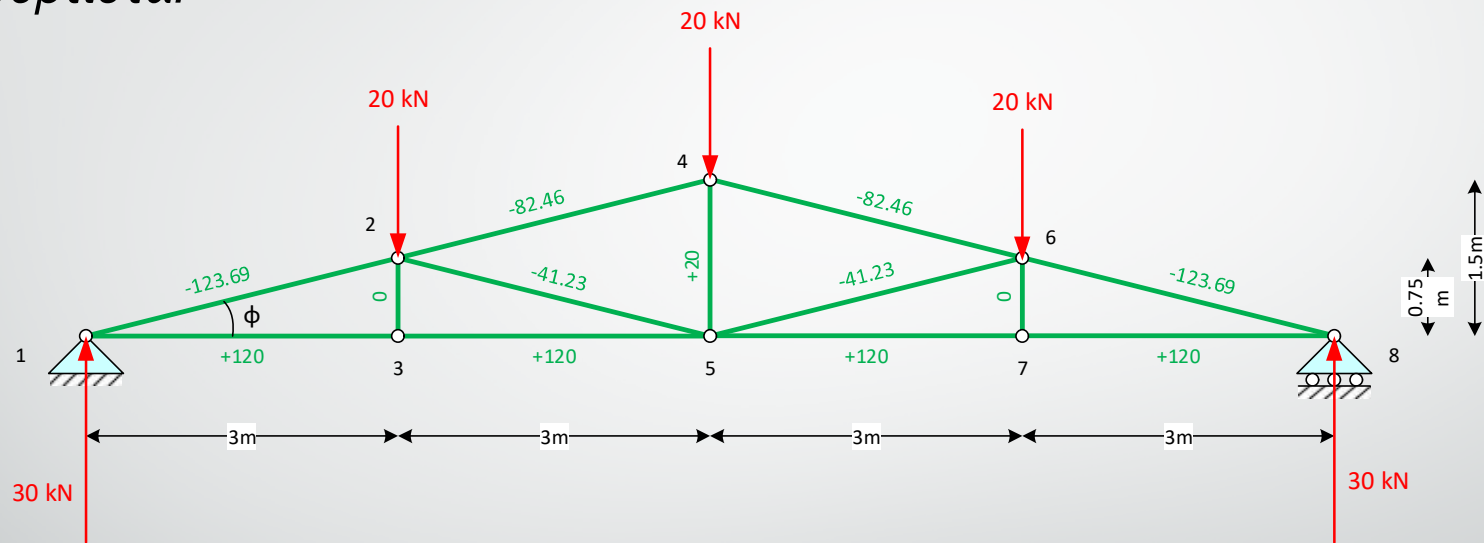
- Αν θέλαμε να βρούμε και τις δυνάμεις των υπόλοιπων μελών, θα μπορούσαμε να πάρουμε εναλλακτικά την τομή t'_2 και να συνεχίσουμε.



- Ή, αν επιτρεπόταν, θα μπορούσαμε να πάρουμε την ισορροπία του κόμβου 3. Γενικότερα υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης, κάποιοι όμως είναι πιο απλοί.
- Γενικά, για να βρω όλες τις δυνάμεις των ράβδων που τέμνω, με ισορροπία κόμβων θα πρέπει να έχω ως δύο αγνώστους, με τομή Ritter ως τρεις αγνώστους.

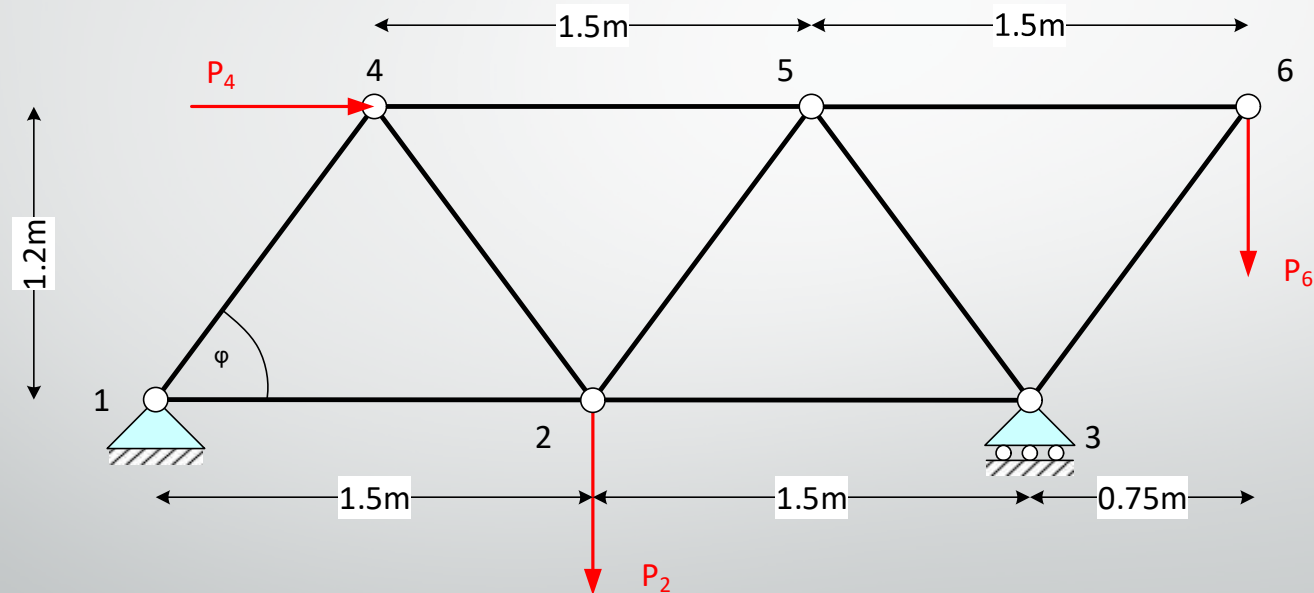
Άσκηση 4.2

- Τα τελικά αποτελέσματα σε kN φαίνονται παρακάτω. Κάποια μέλη είναι αφόρτιστα.



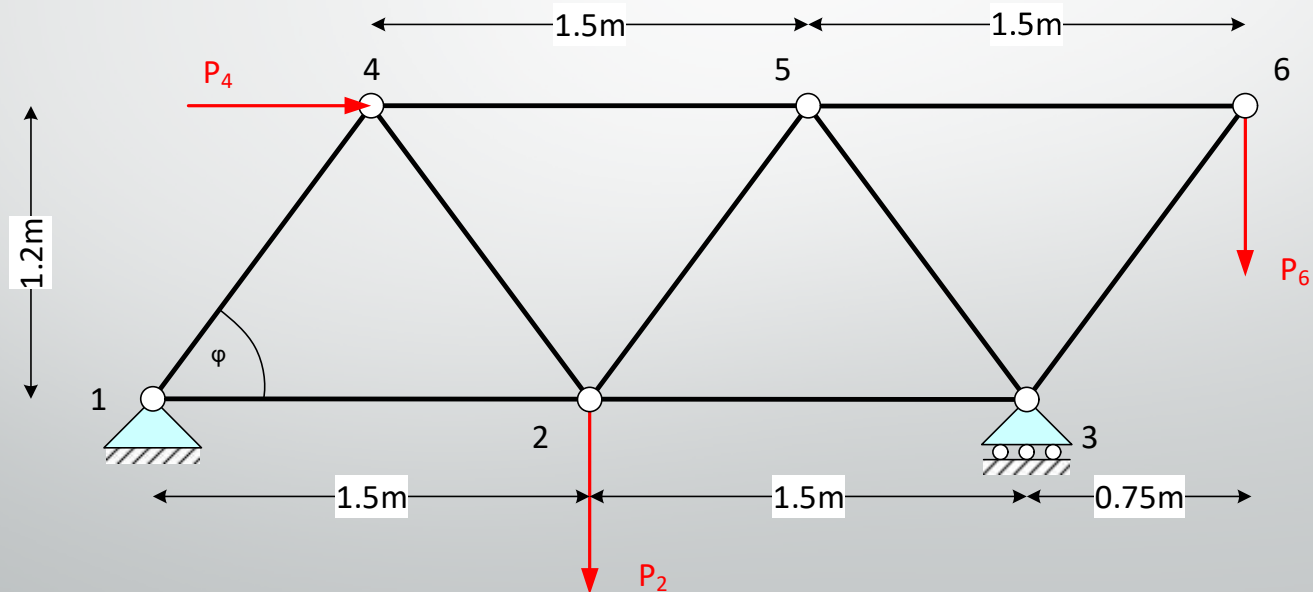
Άσκηση 4.3

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών του. Δίνεται $P_2=9\text{kN}$, $P_4=4\text{kN}$, $P_6=4\text{kN}$.



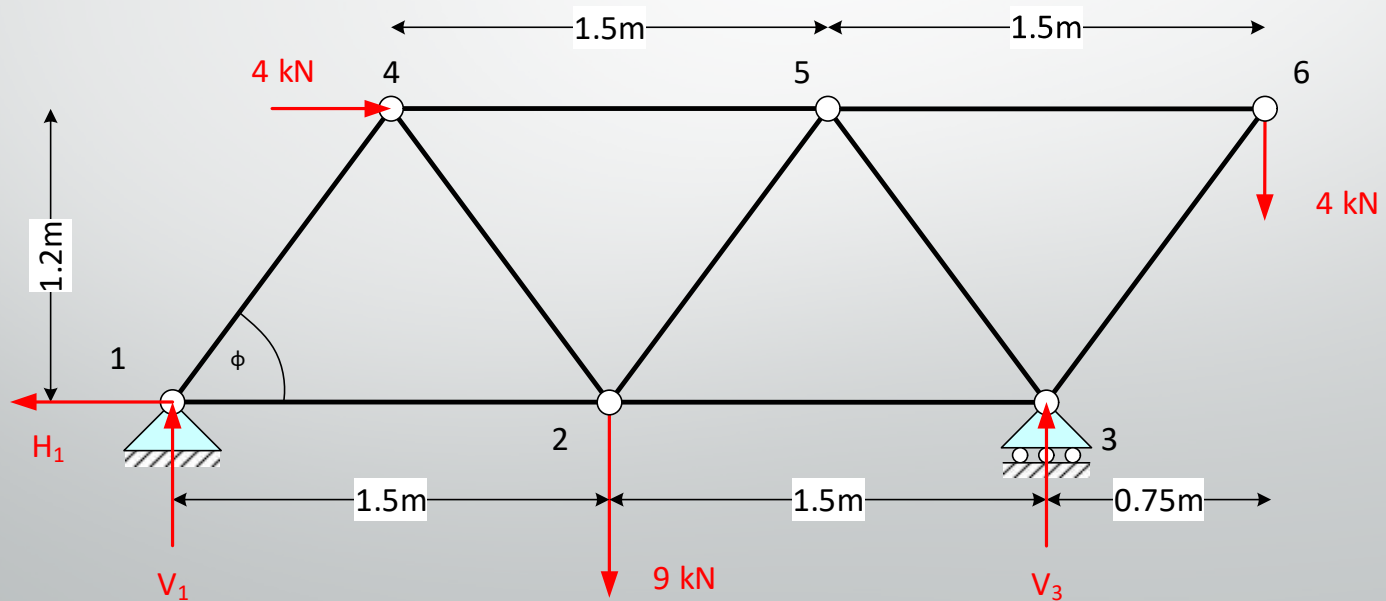
Άσκηση 4.3

- Το δικτύωμα είναι αμφιέριστα στηριγμένο (εξωτερικά ισοστατικό).
- Ισχύει η σχέση $\rho = 2\kappa - 3$ αφού $\rho = 9$, $\kappa = 6$. Εσωτερικά είναι ευσταθές ως παράθεση τριγώνων χωρίς επικάλυψη, άρα είναι και εσωτερικά ισοστατικό.
- Θεωρείται ότι τα μέλη είναι αβαρή και οι αρθρώσεις λειτουργούν χωρίς τριβές.



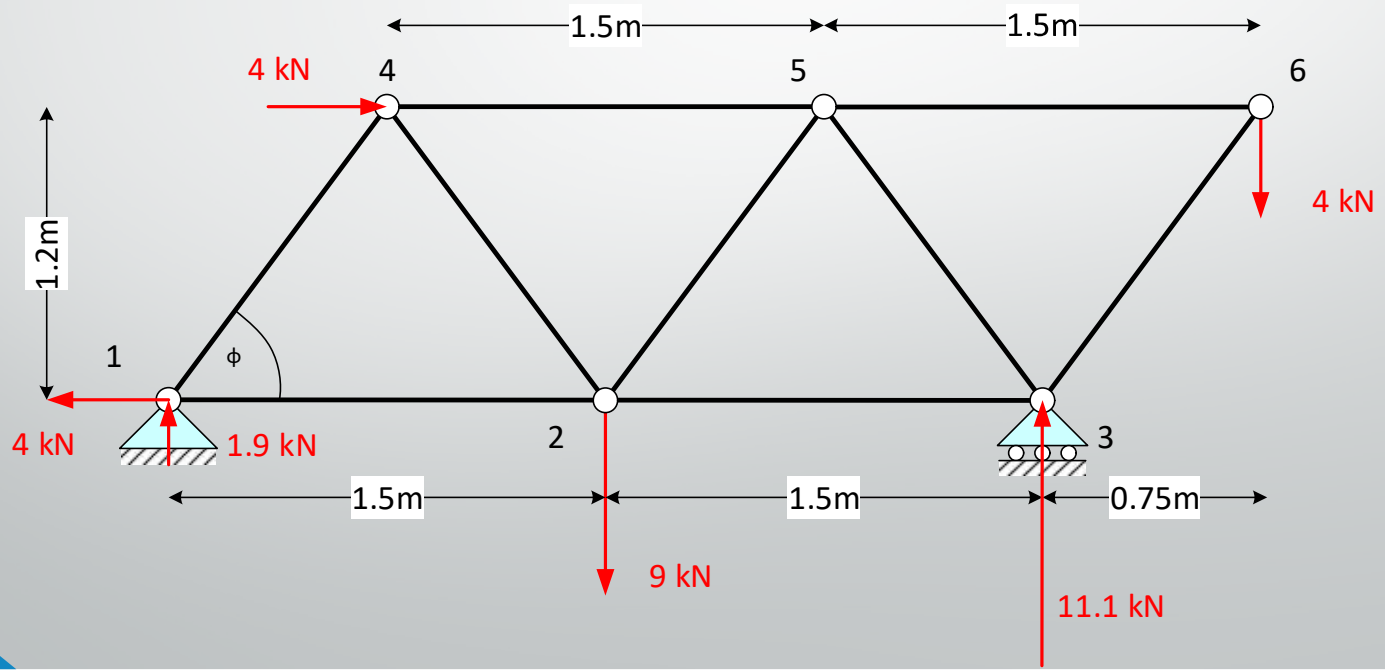
Άσκηση 4.3

- Εύρεση αντιδράσεων:
 - $H_1 = 4 \text{ kN}$, με φορά προς τα αριστερά
 - $V_1 = 1.9 \text{ kN}$, με φορά προς τα πάνω
 - $V_3 = 11.1 \text{ kN}$, με φορά προς τα πάνω.



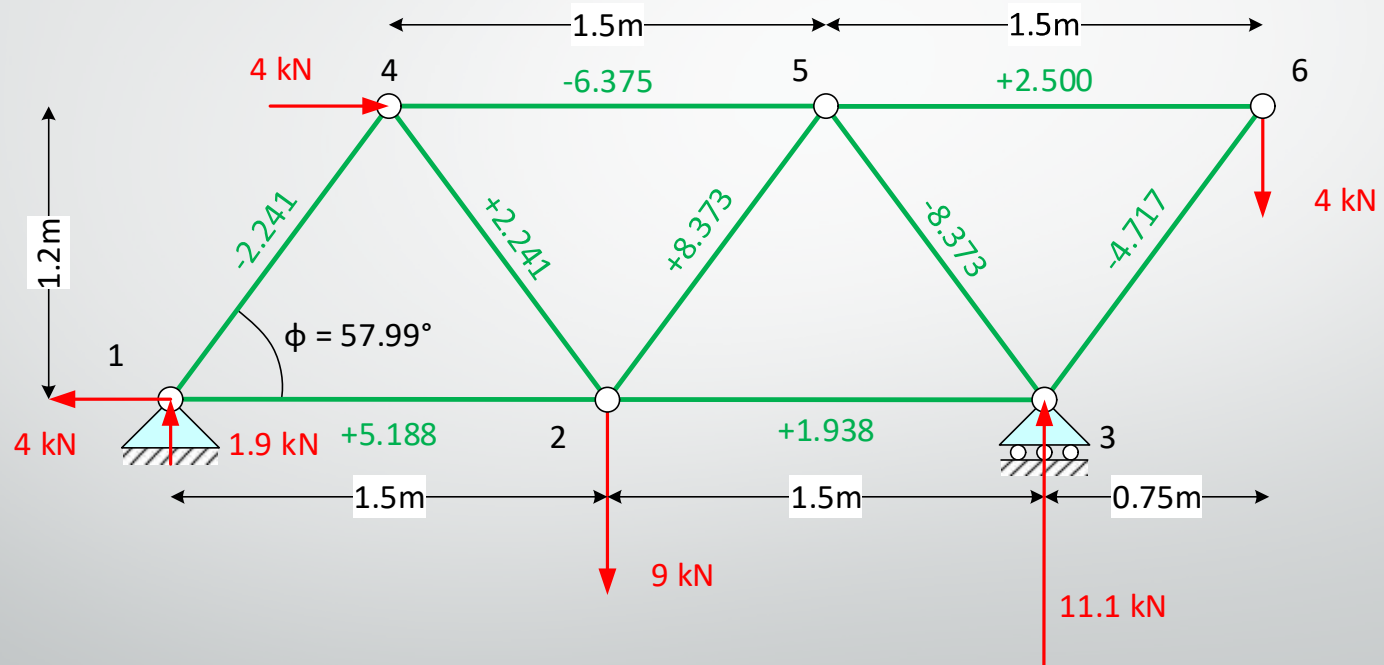
Άσκηση 4.3

- Επίλυση (προσοχή ΔΕΝ υπάρχει κάποια συμμετρία):
 - Με διαδοχικές ισορροπίες κόμβων: 1, 4, 2, 5, 3.
 - Με διαδοχικές ισορροπίες κόμβων: 6, 3, 5, 2, 4.
 - Με συνδυασμό ισορροπιών κόμβων και τομών Ritter.



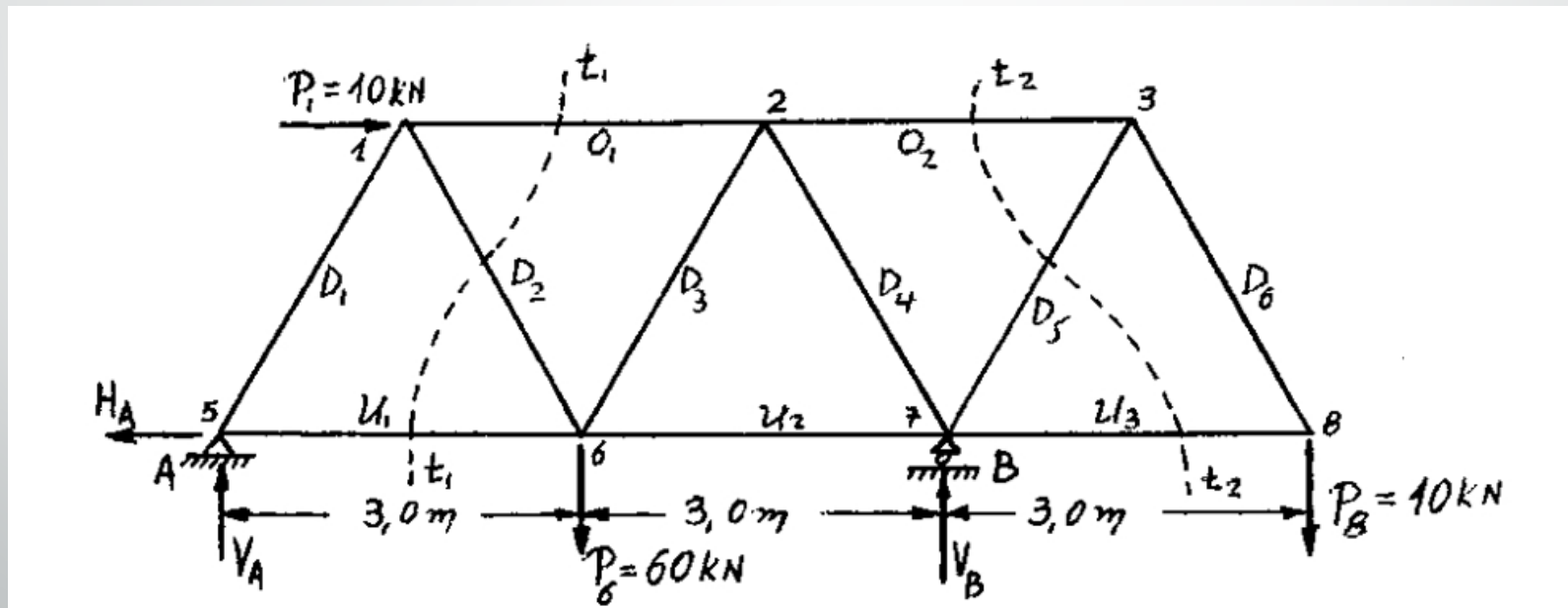
Άσκηση 4.3

- Τα τελικά αποτελέσματα σε kN φαίνονται παρακάτω.



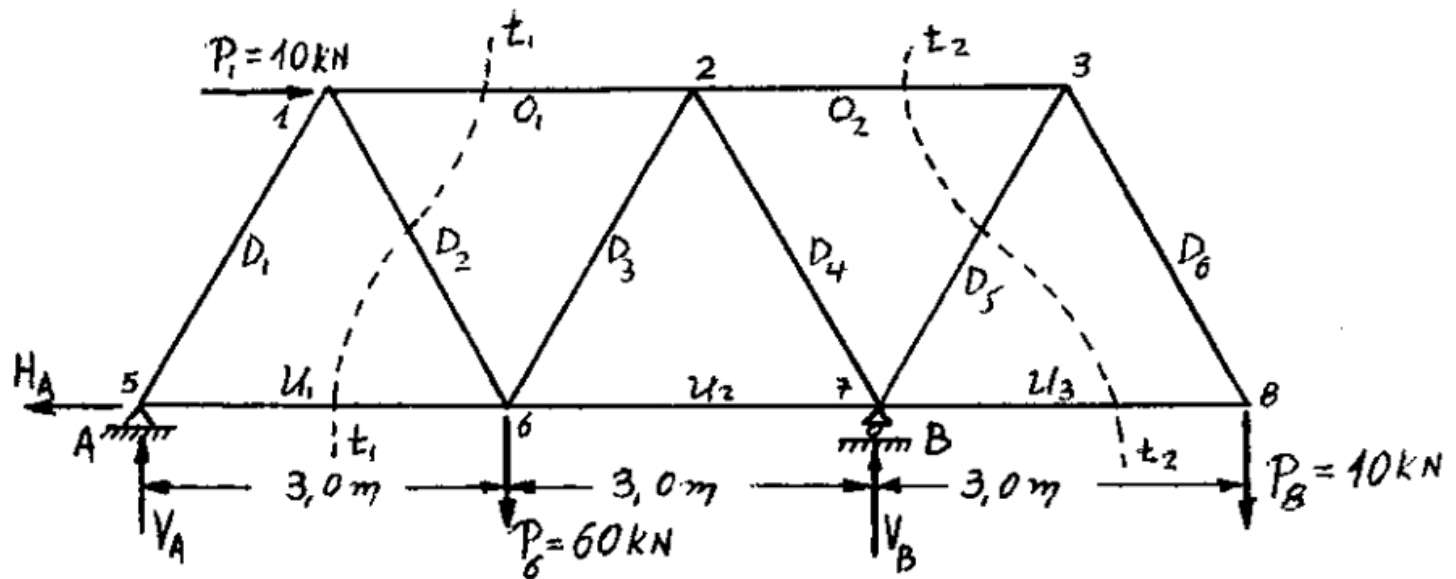
Άσκηση 4.4

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών που τέμνονται από τις τομές Ritter που υποδεικνύονται. Το μήκος όλων των ράβδων είναι 3 m.



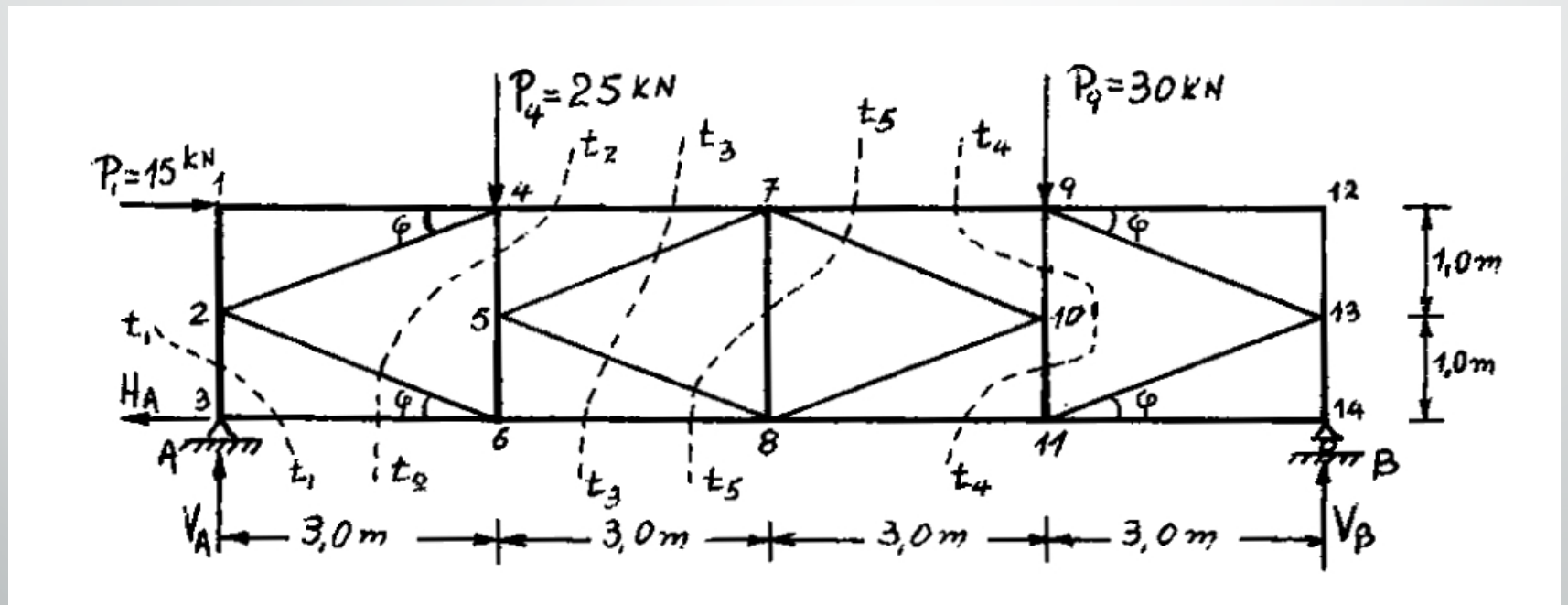
Άσκηση 4.4

- Αποτελέσματα:
- Αντιδράσεις στήριξης: $H_A = 10 \text{ kN}$, $V_A = 20.67 \text{ kN}$, $V_B = 49.33 \text{ kN}$.
- Τομή t_1 : $O_1 = -33.87 \text{ kN}$, $U_1 = +21.93 \text{ kN}$, $D_2 = +23.86 \text{ kN}$.
- Τομή t_2 : $O_2 = +11.55 \text{ kN}$, $U_3 = -5.77 \text{ kN}$, $D_5 = -11.55 \text{ kN}$.



Άσκηση 4.5

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών που τέμνονται από τις τομές Ritter που υποδεικνύονται.



Άσκηση 4.5

- Αποτελέσματα:
- Αντιδράσεις στήριξης: $H_A = 15 \text{ kN}$, $V_A = 23.75 \text{ kN}$, $V_B = 31.25 \text{ kN}$.
- $N_{36} = +15 \text{ kN}$, $N_{23} = -23.75 \text{ kN}$, $N_{47} = -50.625 \text{ kN}$, $N_{26} = +37.55 \text{ kN}$, $N_{45} = -13.125 \text{ kN}$, $N_{68} = 50.625 \text{ kN}$, $N_{58} = -1.98 \text{ kN}$, $N_{57} = +1.98 \text{ kN}$, $N_{79} = -46.875 \text{ kN}$, $N_{8-11} = +46.875 \text{ kN}$, $N_{78} = 0$.

