





Τεχνική Μηχανική

Για Χημικούς και Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς ΕΜΠ

A. E. Χαραλαμπίκης, Ph.D.



Στοιχεία Στατικής



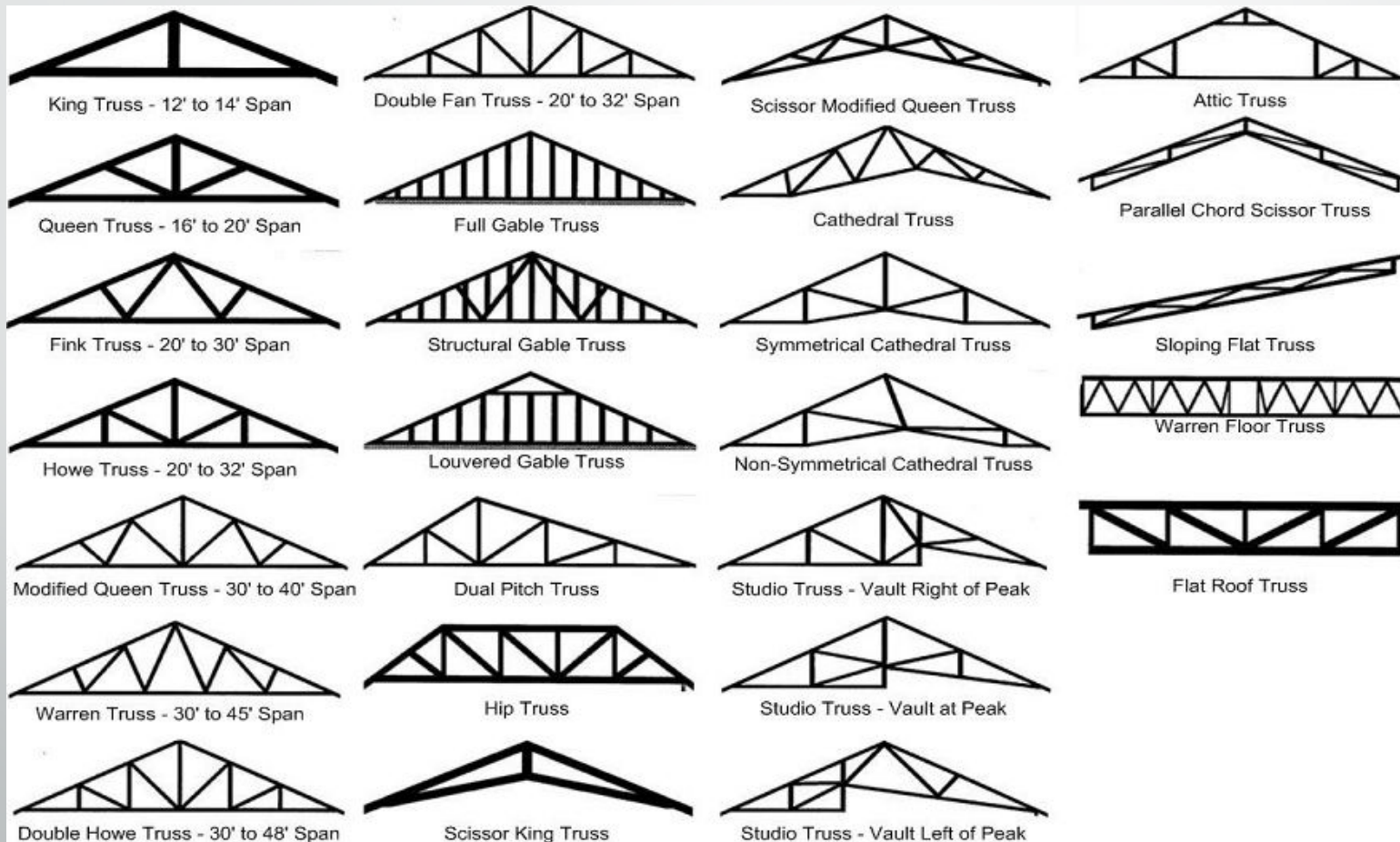
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Εκτός των **ολόσωμων φορέων** που εξετάσαμε, υπάρχει και μια ειδική κατηγορία φορέων που ονομάζονται **δικτυωτοί φορείς** με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και πλεονεκτήματα.
- Οι δικτυωτοί φορείς σχηματίζονται με ευθύγραμμες ράβδους οι οποίες συνδέονται **αρθρωτά** μεταξύ τους και στα δύο άκρα τους, στις δύο ή και τις τρεις διαστάσεις. Στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε σε **επίπεδα δικτυώματα**, ενώ στην δεύτερη περίπτωση σε **χωροδικτυώματα**.
- Τα δικτυώματα χαρακτηρίζονται από **υψηλή ικανότητα ανάληψης φορτίων** και **από μικρό ίδιο βάρος**. Αποτελούν τεχνοοικονομικά εξαιρετική λύση όταν θέλουμε να καλύψουμε μεγάλα ανοίγματα, όπως σε περιπτώσεις γεφυρών, σε στέγες βιομηχανικών χώρων, σε καλύψεις κερκίδων σε στάδια κ.λπ.

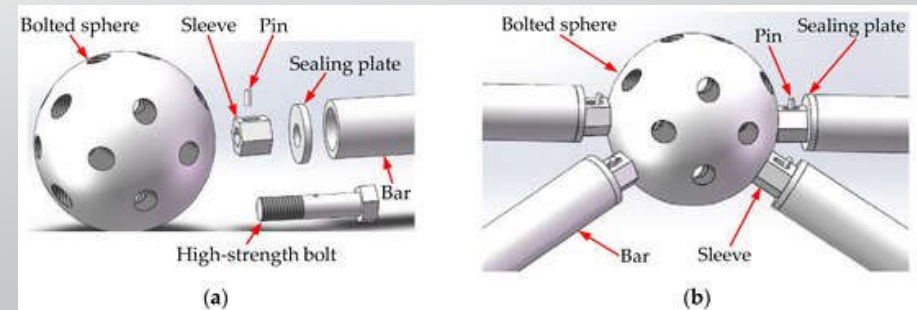
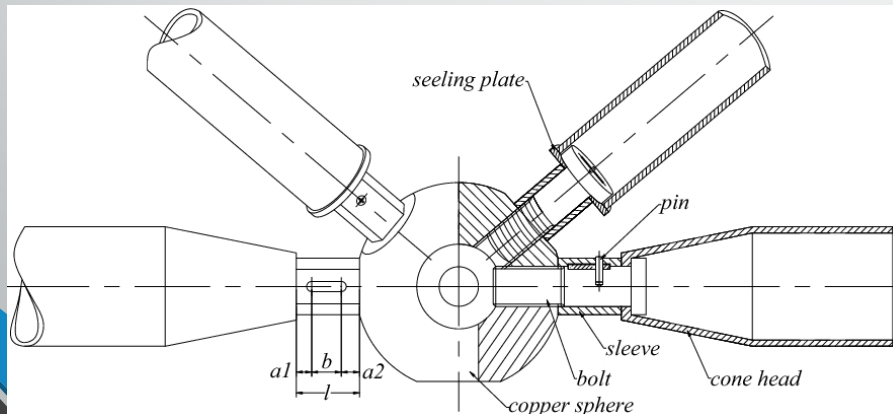
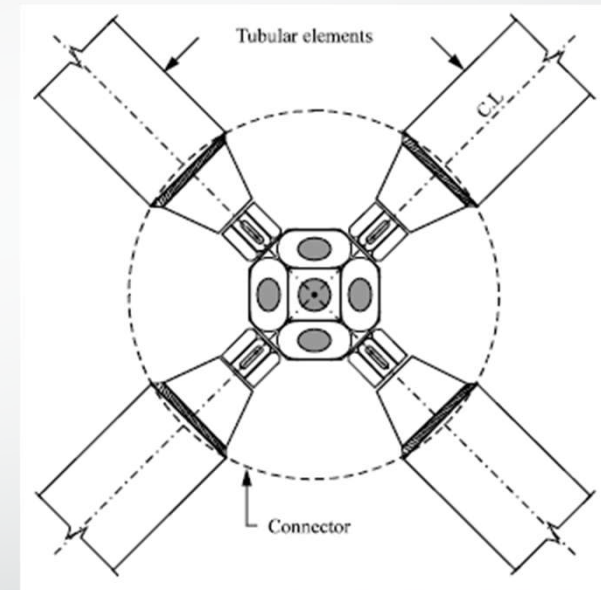
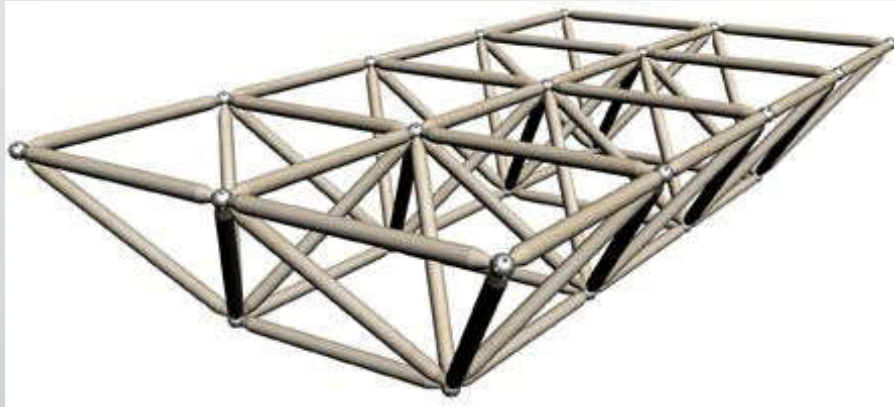
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Επίπεδα δικτυώματα:



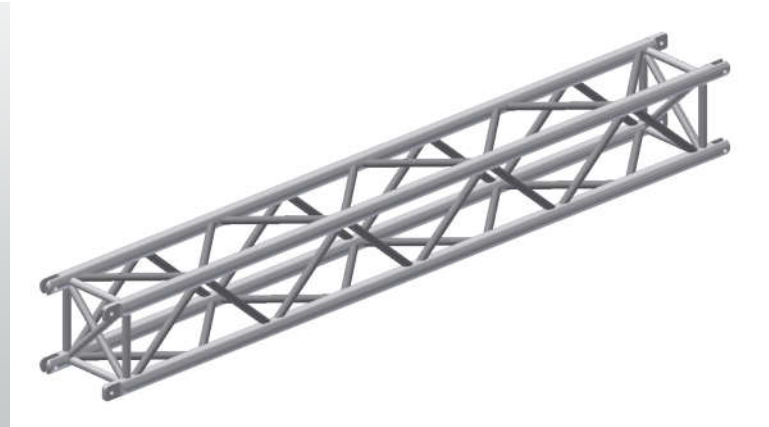
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Χωροδικτυώματα:



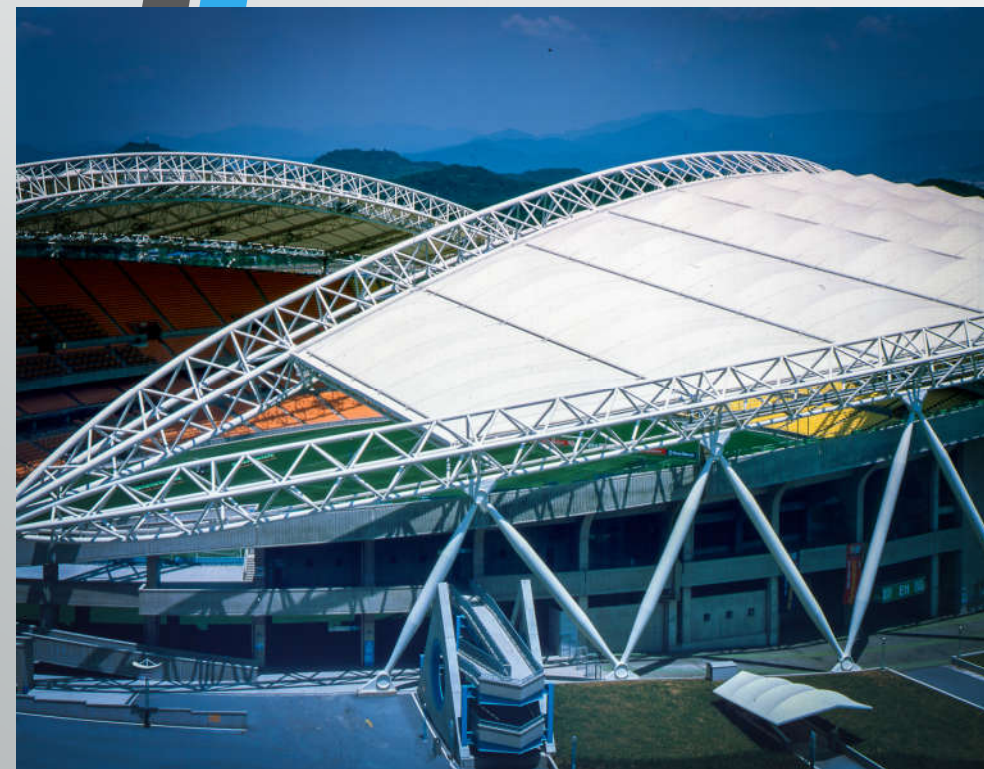
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Χωροδικτυώματα:



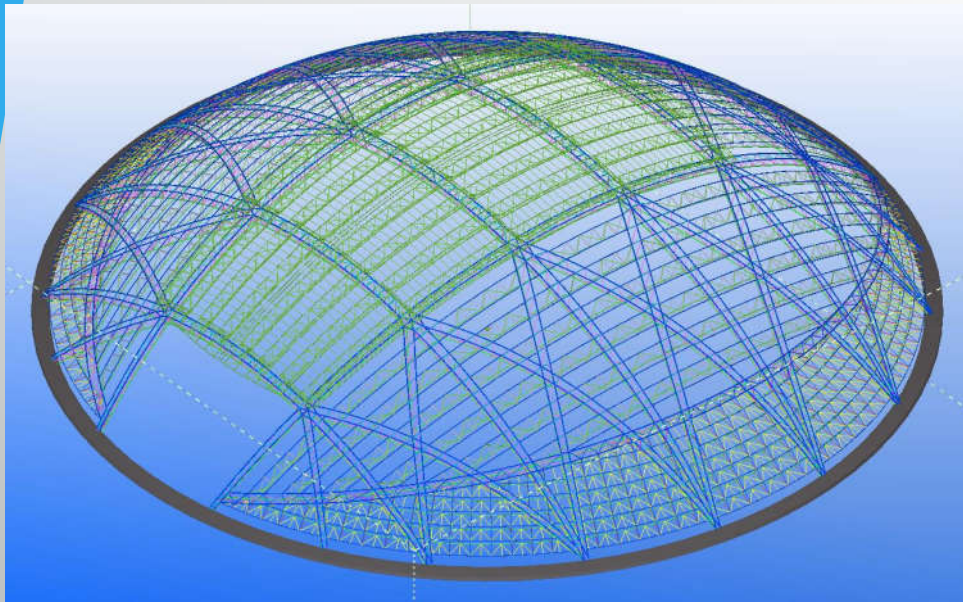
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- *Χωροδικτυώματα (Daegu stadium, South Korea, by WS Atkins - 2001):*



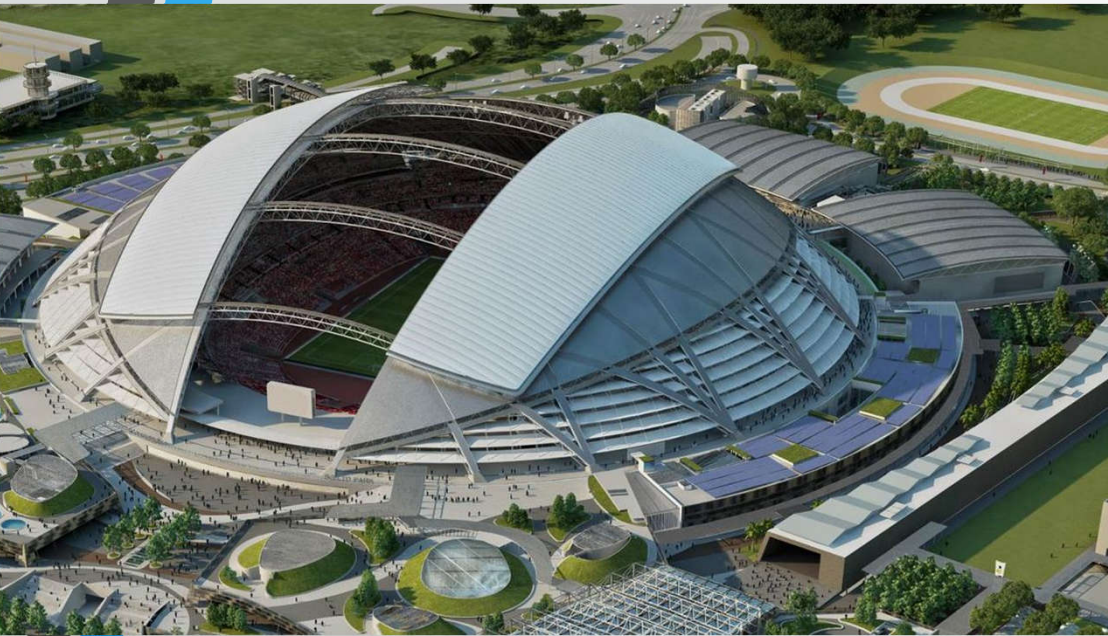
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- *Χωροδικτυώματα (Singapore National Stadium - 2014):*



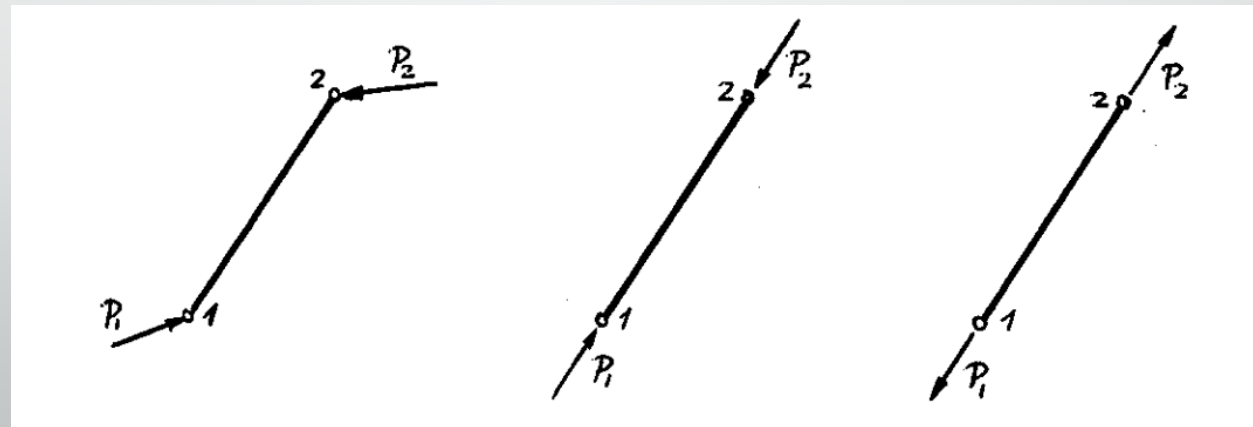
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- *Χωροδικτυώματα (Singapore National Stadium - 2014):*



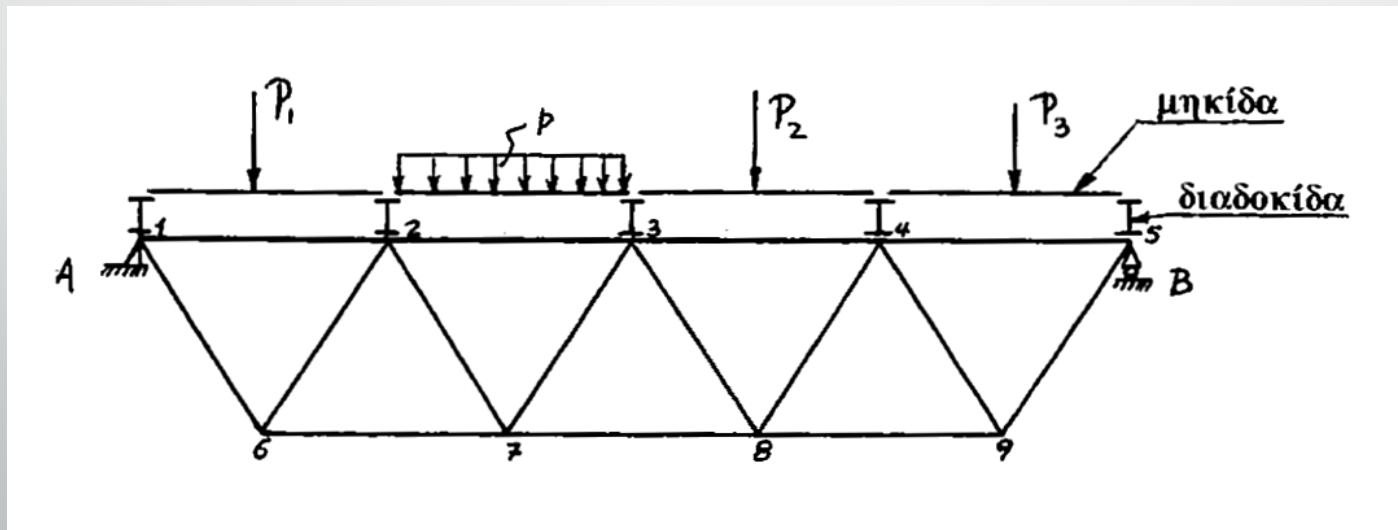
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Θα ονομάσουμε **ιδανικό** ή **ιδεατό** το δικτύωμα στο οποίο:
 - Οι ράβδοι είναι αβαρείς,
 - Οι αρθρώσεις λειτουργούν χωρίς τριβές,
 - Οι εξωτερικές δυνάμεις (φορτία, αντιδράσεις στηρίξεων) ενεργούν στους κόμβους.
- Αν συντρέχουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε **κάθε ράβδος απαραίτητα θα φορτίζεται μόνο αξονικά**, σε εφελκυσμό ή θλίψη (δεν μπορεί να υπάρχει ούτε τέμνουσα ούτε καμπτική ροπή εσωτερικά στην ράβδο).



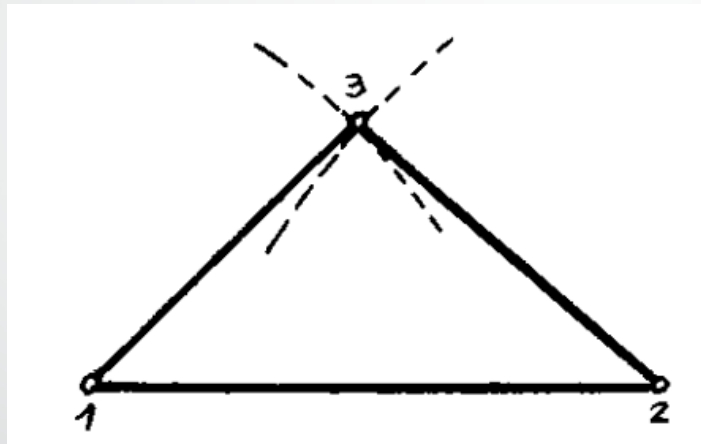
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Στα **πραγματικά** δικτυώματα:
 - Οι ράβδοι δεν είναι αβαρείς, μερικές φορές ούτε ευθύγραμμες,
 - Οι συνδέσεις γίνονται με συγκόλληση, ήλωση (καρφιά, πριτσίνια) ή κοχλίωση (με βίδες). Πολλές φορές, η συνέχεια των ράβδων δεν διακόπτεται στους κόμβους, όπως είδαμε.
 - Σε κάθε περίπτωση, προσπαθούμε να μεταφέρουμε τα φορτία στους κόμβους με χρήση έμμεσων στηρίξεων:



Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

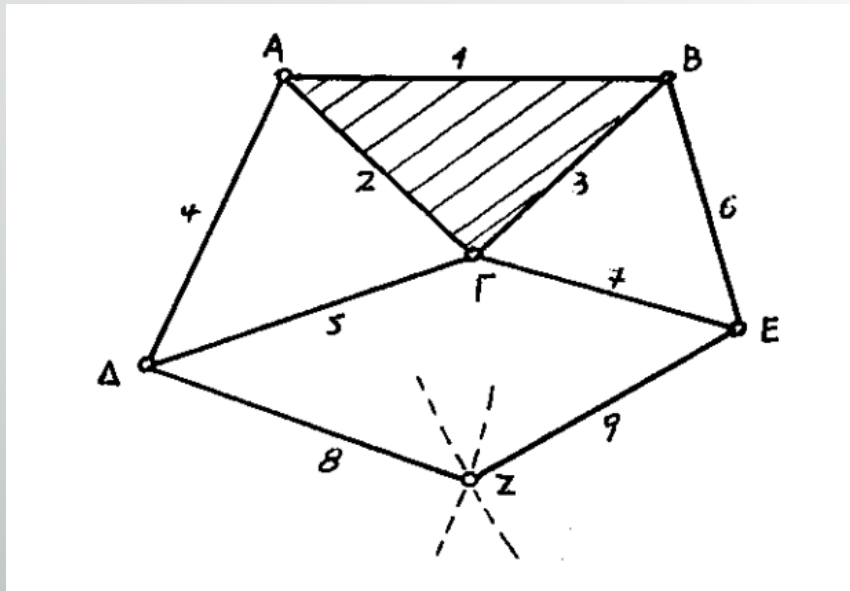
- Ένα δικτύωμα είναι εσωτερικά ισοστατικό, όταν μετατρέπεται σε μηχανισμό με την αφαίρεση οποιουδήποτε μέλους του.
- Το απλούστερο ισοστατικό επίπεδο δικτύωμα είναι ένα αρθρωτό τρίγωνο:



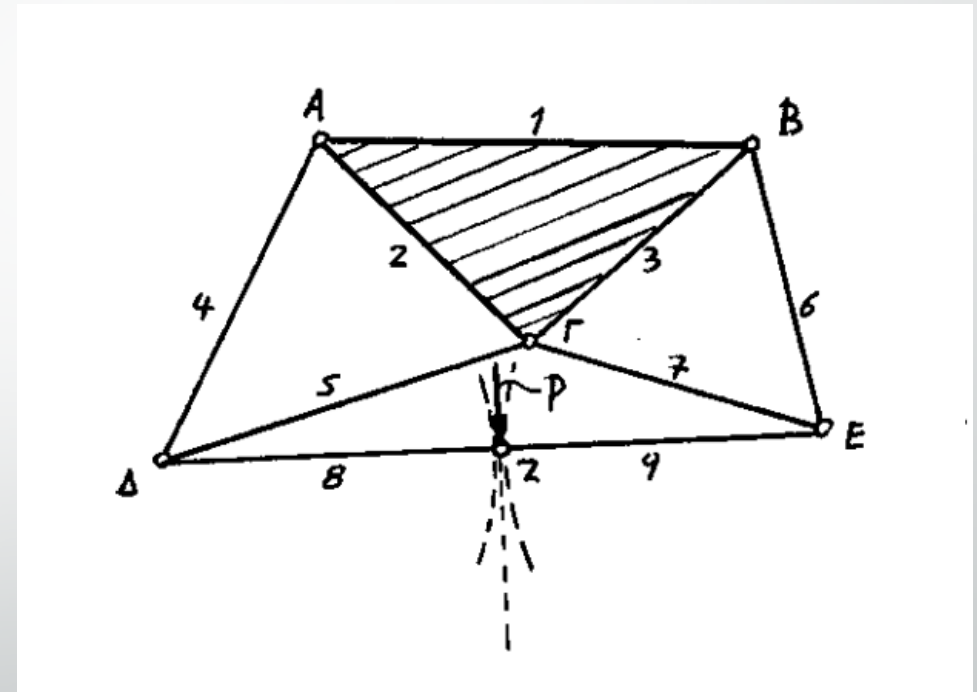
- Το αρθρωτό τρίγωνο είναι στερεός σχηματισμός, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένας τριγωνικός δίσκος.

Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Συνδέοντας επιπλέον κόμβους και μέλη (ράβδους) στο αρθρωτό τρίγωνο, προκύπτουν πιο σύνθετα επίπεδα δικτυώματα:



Προσθήκη +1 κόμβου +2 μελών, με τον νέο κόμβο Z να **μην** είναι σε ευθυγραμμία με τους E, Δ.



Ασταθής σχηματισμός (απειροστή κινηματικότητα)

Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

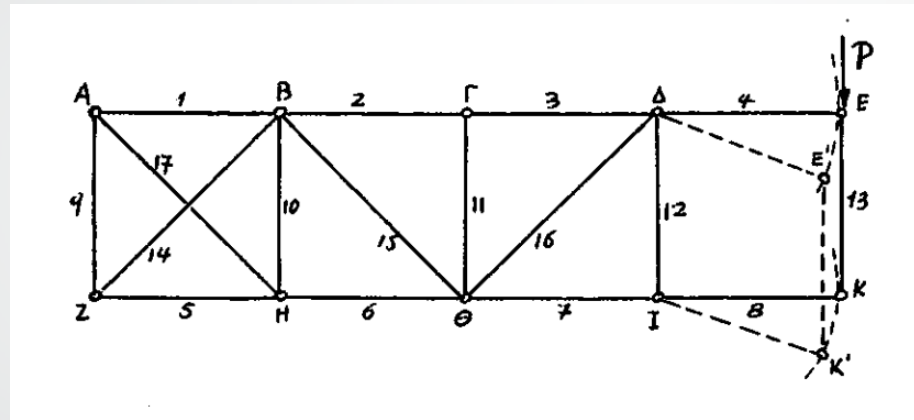
- Απαραίτητη συνθήκη να είναι ένα επίπεδο δικτύωμα εσωτερικά ισοστατικό είναι να ισχύει η σχέση:

$$\rho = 2\kappa - 3$$

- όπου, ρ = πλήθος ράβδων, κ = πλήθος κόμβων.
- Αν ένα δίκτυωμα είναι εσωτερικά ισοστατικό, **αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας για να υπολογιστούν οι δυνάμεις όλων των μελών.**
- Σε αντίθετη περίπτωση (εσωτερικά υπερστατικού δικτυώματος), **απαιτούνται επιπλέον εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων.**

Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

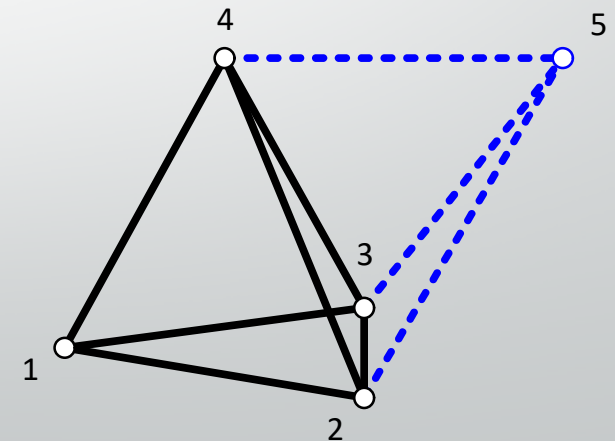
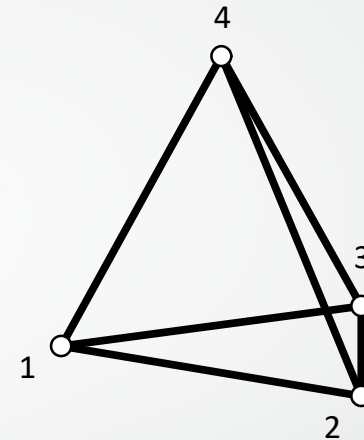
- Η σχέση $\rho = 2\kappa - 3$ είναι απαραίτητη συνθήκη αλλά όχι ικανή! Για παράδειγμα, ο παρακάτω φορέας με $\rho = 17$, $\kappa = 10$ είναι ασταθής:



- Αν $\rho > 2\kappa - 3$ και το επίπεδο δικτύωμα δεν έχει κινηματικότητα, τότε θα είναι εσωτερικά **υπερστατικό**.
- Αν $\rho < 2\kappa - 3$ το επίπεδο δικτύωμα είναι σίγουρα ασταθές (μηχανισμός)!.

Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

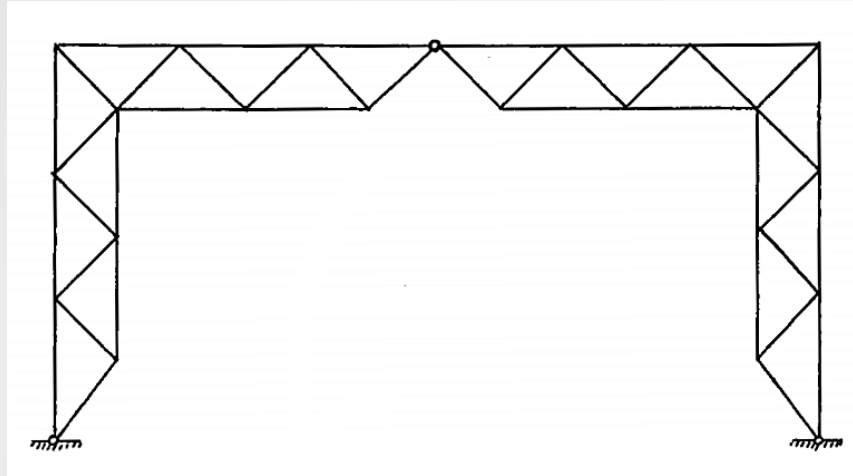
- Ο αντίστοιχος απλούστερος σταθερός σχηματισμός δικτυώματος στις τρεις διαστάσεις είναι ένα τετράεδρο με $\rho = 6$, $\kappa = 4$:
- Για κάθε επιπλέον κόμβο που προσθέτουμε, θα πρέπει να προσθέσουμε και τρεις ράβδους:
- Συνεπώς η αντίστοιχη σχέση που συνδέει τους κόμβους και τις ράβδους σε ένα τρισδιάστατο εσωτερικά ισοστατικό δικτύωμα θα είναι:
$$\rho = 3\kappa - 6$$
- Όπως και στο επίπεδο πρόβλημα, η παραπάνω συνθήκη είναι απαραίτητη αλλά όχι ικανή.



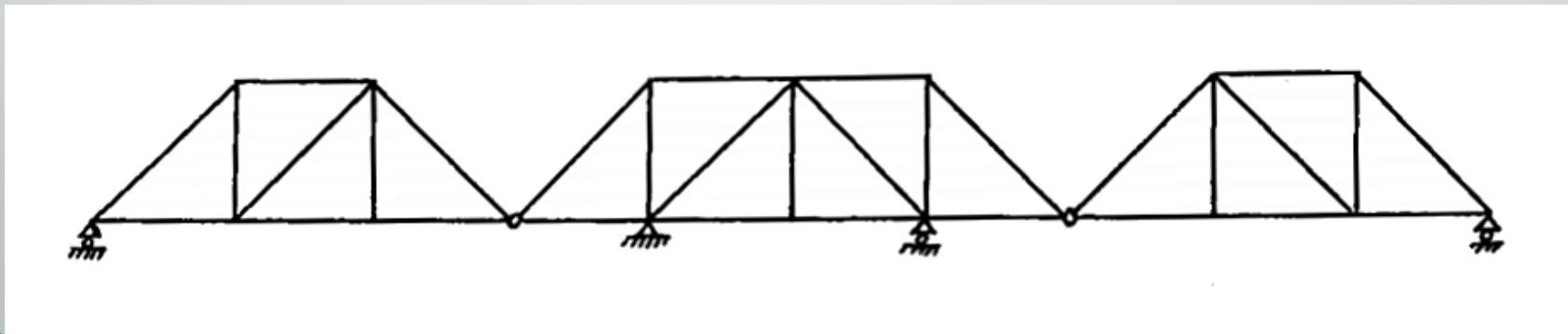
Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Μιλώντας για **συνολικά (όχι εσωτερικά) ισοστατικούς φορείς**, δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις αντιδράσεις στήριξης όσο και ενδεχόμενες εσωτερικές χαλαρώσεις (όπως είδαμε στα τριαρθρωτά τόξα και τις δοκούς Gerber), οι απαραίτητες αλλά όχι ικανές συνθήκες είναι:
 - 2D: $\rho = 2\kappa - \nu$,
 - 3D: $\rho = 3\kappa - \nu$.
- όπου $\rho =$ πλήθος ράβδων, $\kappa =$ πλήθος κόμβων, $\nu =$ πλήθος αντιδράσεων (=πλήθος αγνώστων δυνάμεων, δηλαδή μια άρθρωση ως στήριξη αντιστοιχεί σε δύο αντιδράσεις, ενώ μια κύλιση αντιστοιχεί σε μία αντίδραση, ακόμη και αν η κύλιση είναι κεκλιμένη).
- Πράγματι, στην περίπτωση των δύο διαστάσεων έχω 2κ εξισώσεις ($\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ για κάθε κόμβο), και $\rho + \nu$ αγνώστους (ρ δυνάμεις μελών, ν αντιδράσεις). Στις 3 διαστάσεις έχω 3κ εξισώσεις ($\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$ για κάθε κόμβο), που θα πρέπει να είναι πάλι ίσες με $\rho + \nu$ αγνώστους.

Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)



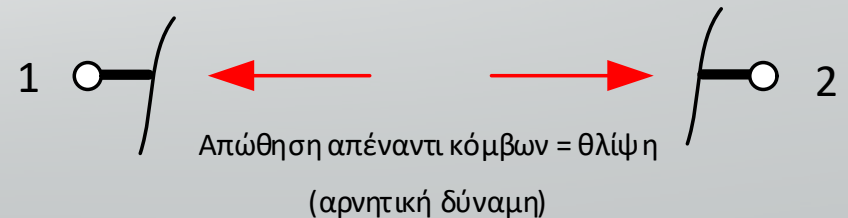
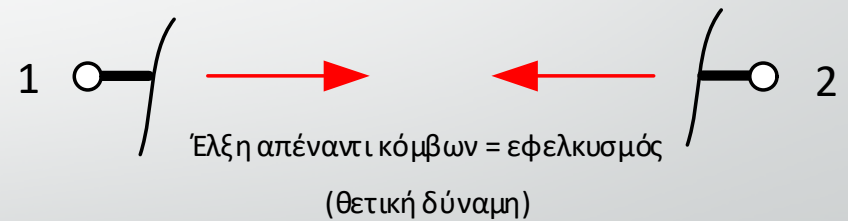
Τριαρθρωτό τόξο ($\rho = 42, \kappa = 23, \nu = 4$), ισοστατικός φορέας με $\rho = 2\kappa - \nu$.



Δοκός Gerber ($\rho = 31, \kappa = 18, \nu = 5$), ισοστατικός φορέας με $\rho = 2\kappa - \nu$.

Δικτυωτοί φορείς (Δικτυώματα)

- Η επίλυση των ισοστατικών δικτυωμάτων μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:
 1. **Με ισορροπία κόμβων**, δηλαδή τις εξισώσεις $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$ για κάθε κόμβο, και σταδιακή επίλυση όλου του δικτυώματος. Εδώ δεν έχουμε στην διάθεσή μας εξίσωση ισορροπίας ροπών, γιατί όλες οι δυνάμεις είναι συντρέχουσες στον ίδιο τον κόμβο.
 2. **Με κατάλληλες τομές Ritter και ισορροπία ολόκληρων τμημάτων της κατασκευής**, ειδικά όταν μας απασχολεί η δύναμη που φέρουν συγκεκριμένα μέλη του δικτυώματος και όχι όλα. Εδώ μπορούμε να πάρουμε τόσο ισορροπία ροπών όσο και δυνάμειων.
- Επειδή έχουμε μόνο αξονικές δυνάμεις, και μάλιστα οι δυνάμεις αυτές είναι σταθερές καθ' όλο το μήκος του (αβαρούς) μέλους, **δεν χρειάζεται να κάνουμε διαγράμματα εσωτερικών δυνάμειων**. Αρκεί μόνο ένα νούμερο ανά μέλος, δηλαδή η αξονική δύναμη (θετική για εφελκυσμό, αρνητική για θλίψη).



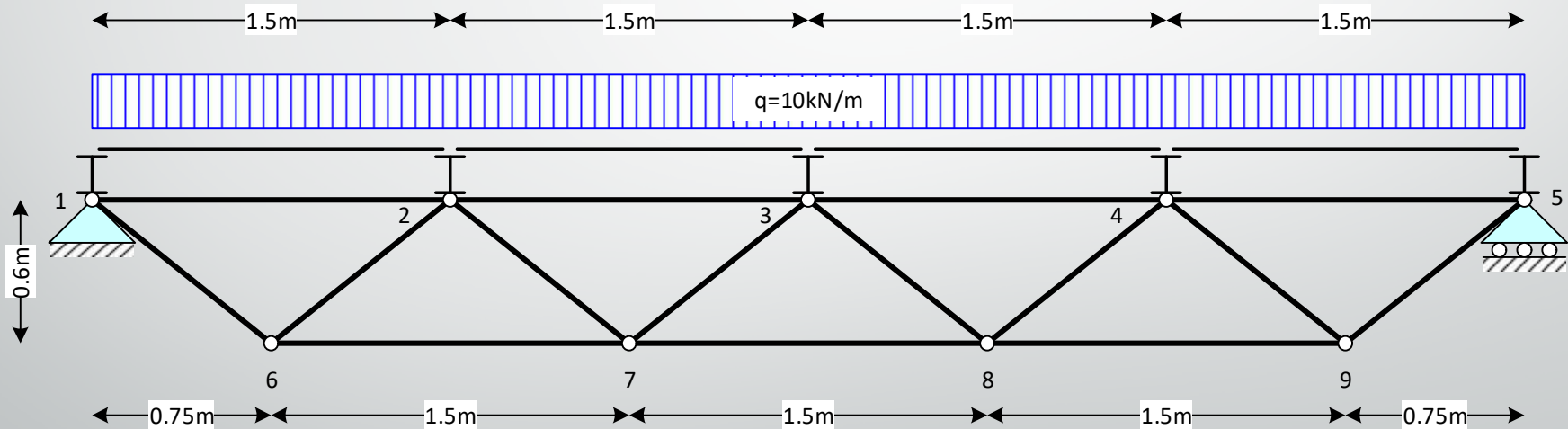


Ασκήσεις

Δικτυώματα

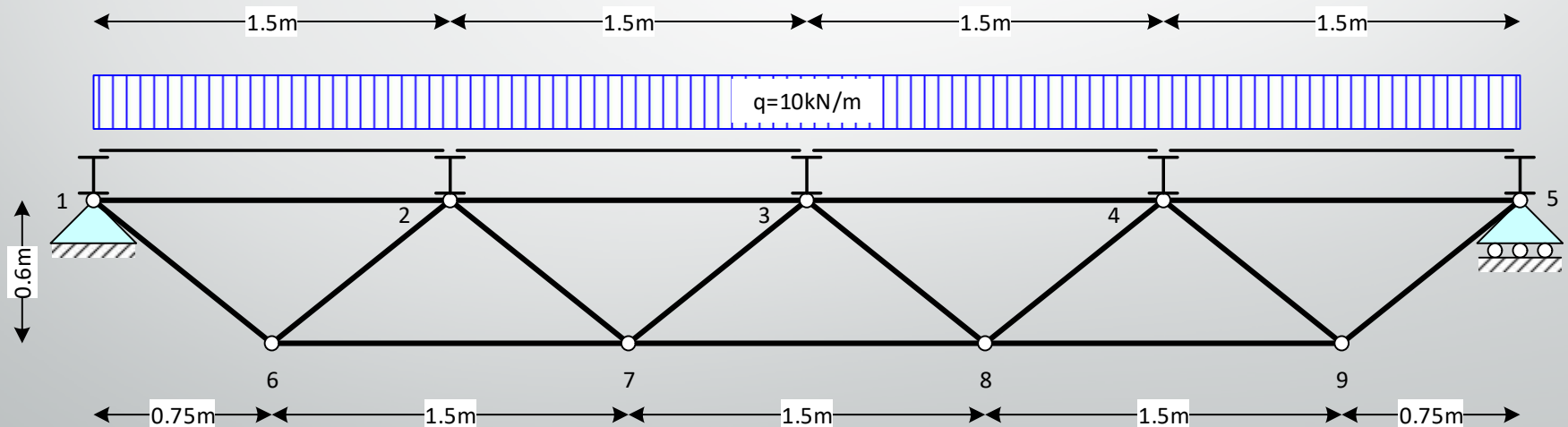
Άσκηση 4.1

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών του.



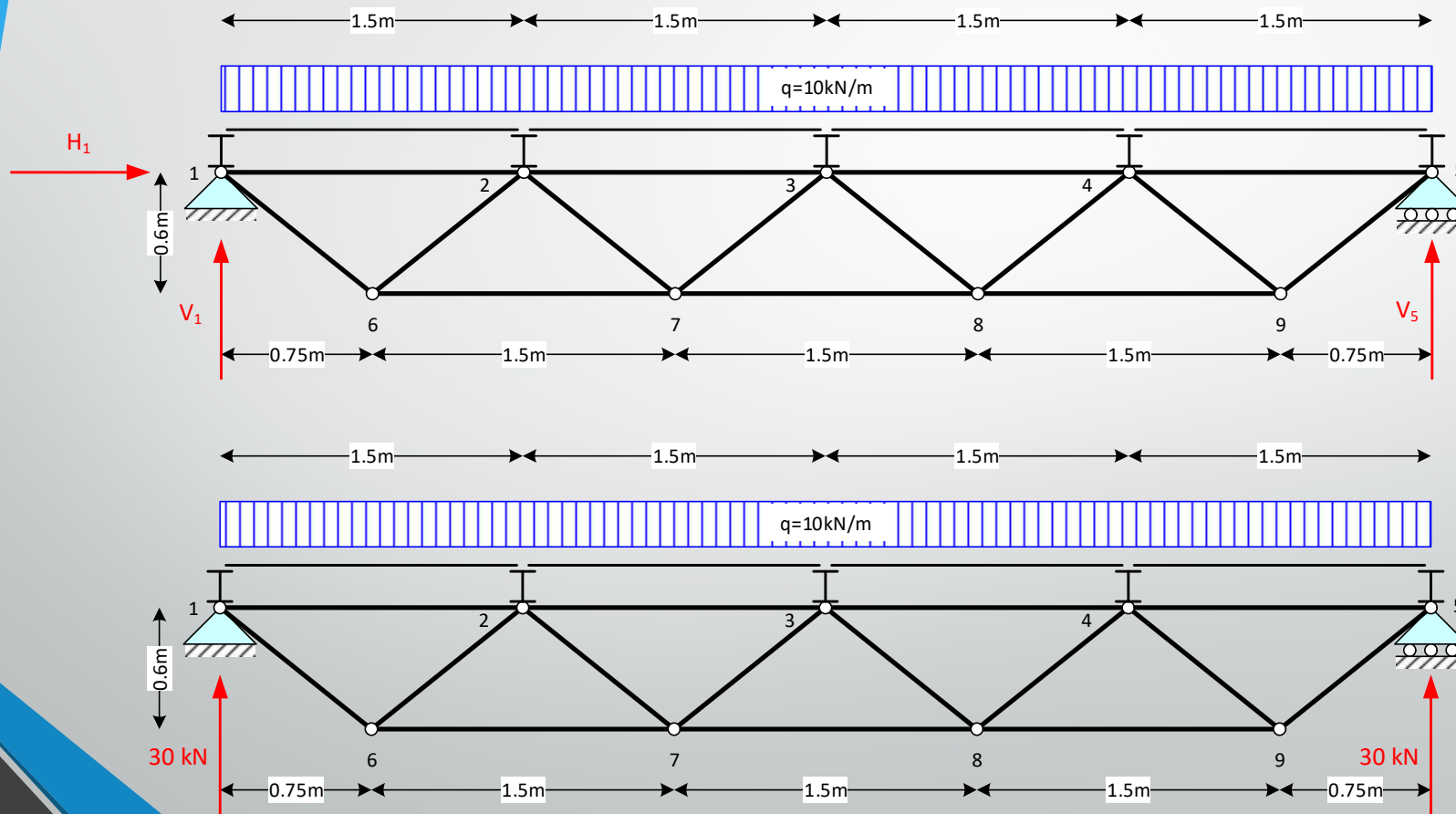
Άσκηση 4.1

- Το δικτύωμα είναι αμφιέρειστα στηριγμένο (εξωτερικά ισοστατικό).
- Ισχύει η σχέση $\rho = 2\kappa - 3$ αφού $\rho = 15$, $\kappa = 9$. Εσωτερικά είναι ευσταθές ως παράθεση τριγώνων χωρίς επικάλυψη, άρα είναι και εσωτερικά ισοστατικό.
- Θεωρείται ότι τα μέλη είναι αβαρή, οι αρθρώσεις λειτουργούν χωρίς τριβές, ενώ η φόρτιση γίνεται επί των κόμβων 1 ως 5, μέσω έμμεσης στήριξης επί διαδοκίδων.



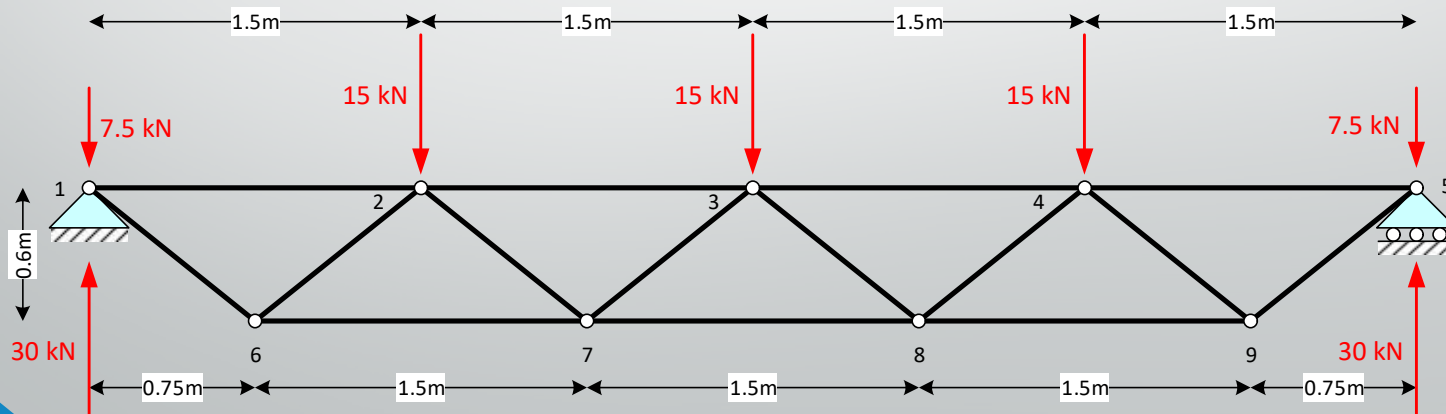
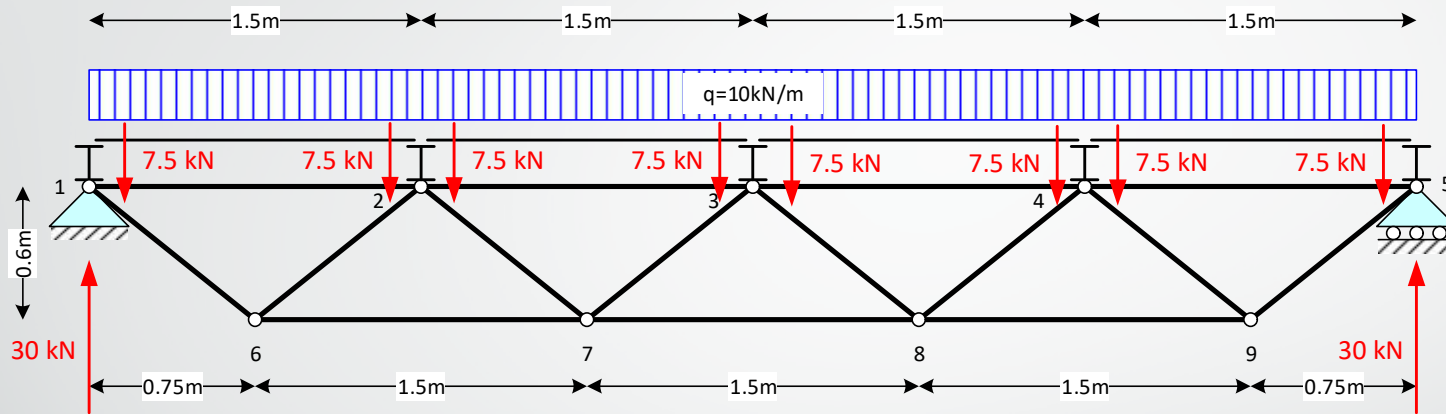
Άσκηση 4.1

- Εύρεση αντιδράσεων



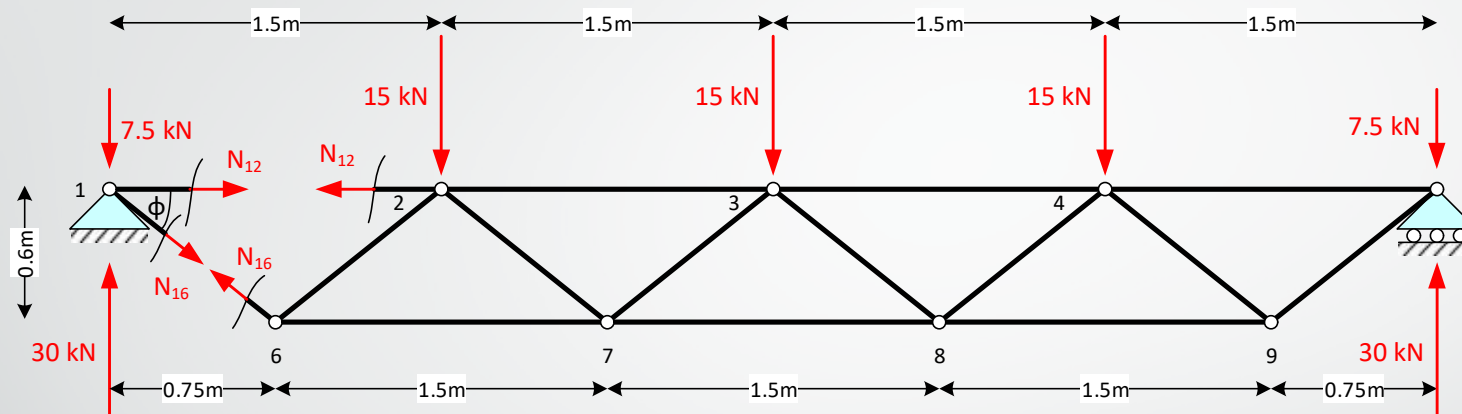
Άσκηση 4.1

- Εύρεση επικόμβιων φορτίων από την έμμεση φόρτιση



Άσκηση 4.1

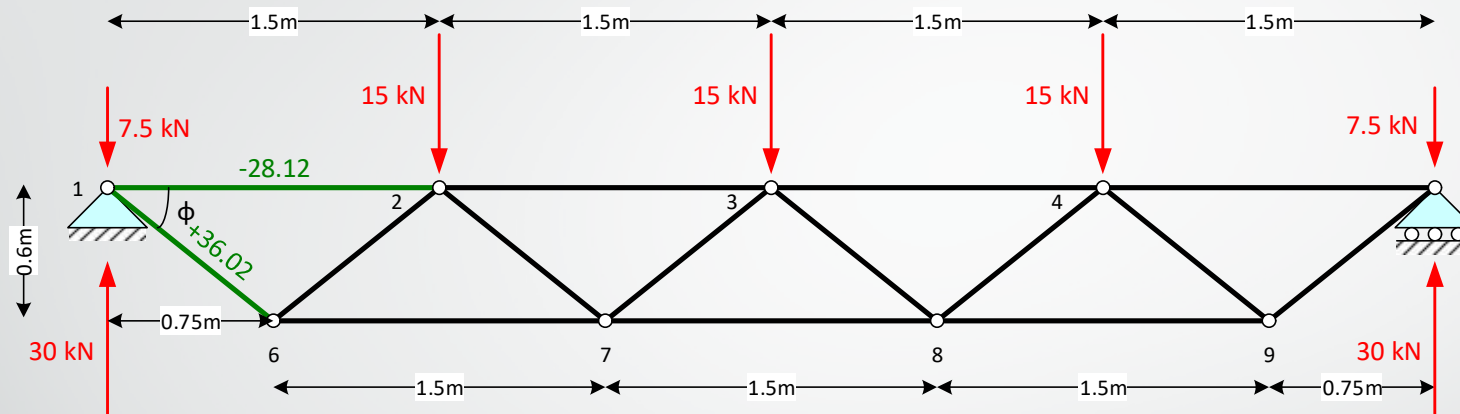
- Ισορροπία κόμβου 1.



- $\phi = \arctan(0,6/0,75) = 38,66^{\circ}$.
- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{12} + N_{16} \cos(\varphi) = 0$
- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 30 - N_{16} \sin(\varphi) - 7,5 = 0 \Rightarrow N_{16} = +36,02 \text{ kN}$
- Προκύπτει $N_{12} = -N_{16} \cos(\varphi) = -36,02 \times 0,781 = -28,13 \text{ kN}$

Άσκηση 4.1

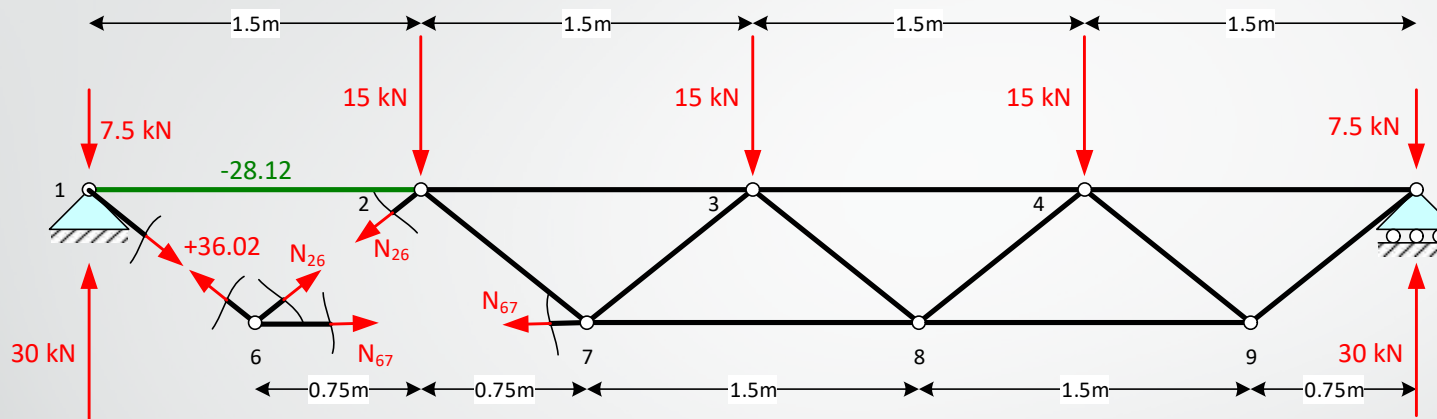
- Ισορροπία κόμβου 1.



- Επόμενη ισορροπία κόμβου 6 (δύο άγνωστοι: N_{26} , N_{67} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).
- Δεν θα μπορούσα να προχωρήσω με τον κόμβο 2 (τρεις άγνωστοι: N_{23} , N_{27} , N_{26} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).

Άσκηση 4.1

- Ισορροπία κόμβου 6.



- Πάντα, όπου κάνουμε τομή, είναι καλό να βάζουμε την άγνωστη δύναμη ως εφελκυστική (με φορά προς τον απέναντι κόμβο).

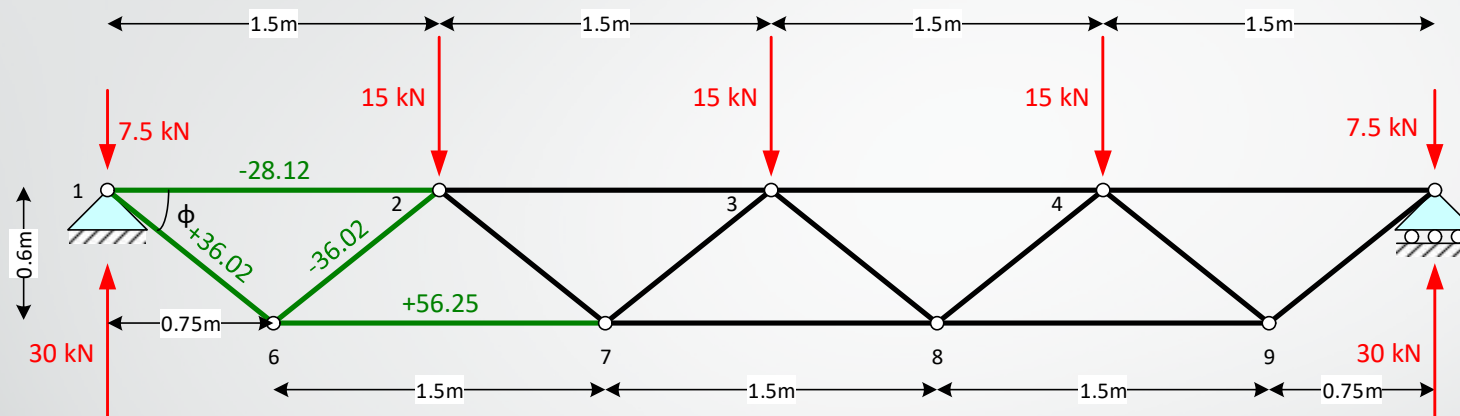
- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{67} + N_{26} \cos(\varphi) - 36,02 \cos(\varphi) = 0$

- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{26} \sin(\varphi) + 36,02 \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{26} = -36,02 \text{ kN}$

Προκύπτει $N_{67} - 36,02 \cos(\varphi) - 36,02 \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{67} = +56,25 \text{ kN}$

Άσκηση 4.1

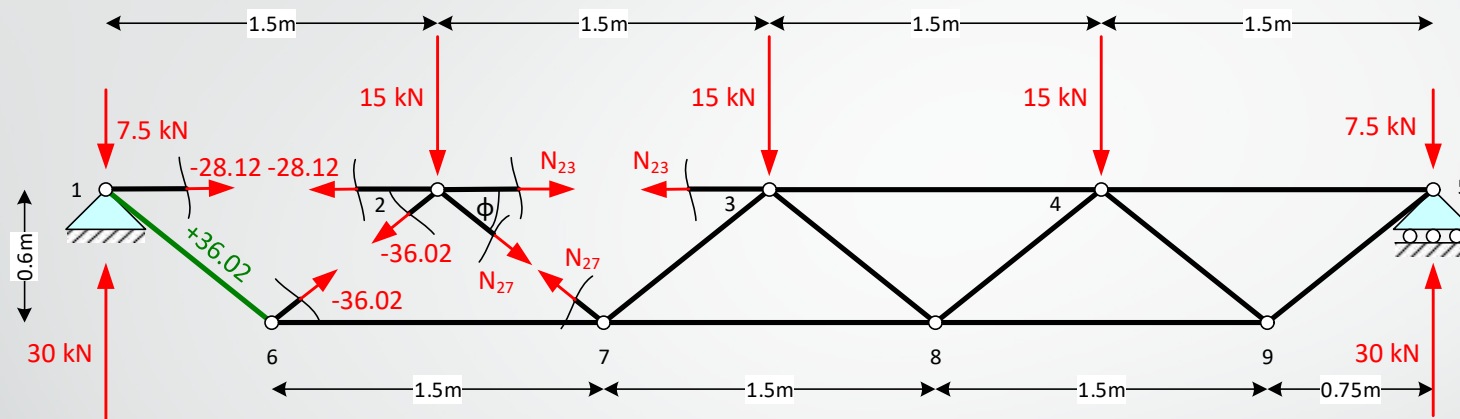
- Ισορροπία κόμβου 6.



- Επόμενη ισορροπία κόμβου 2 (δύο άγνωστοι: N_{23} , N_{27} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).
- Δεν θα μπορούσα να προχωρήσω με τον κόμβο 7 (τρεις άγνωστοι: N_{27} , N_{37} , N_{78} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).

Άσκηση 4.1

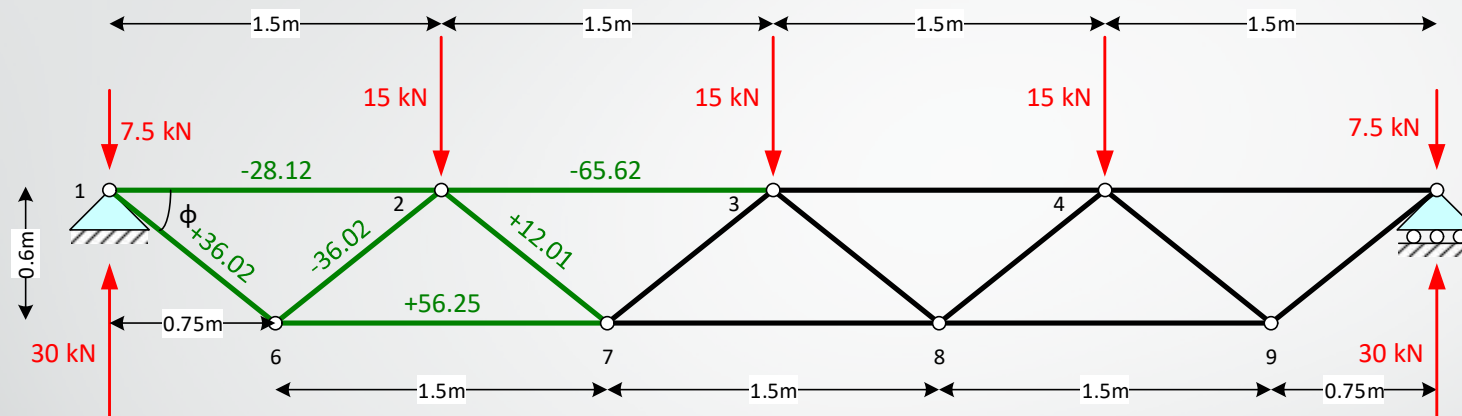
- Ισορροπία κόμβου 2.



- Είναι πιο εύκολο, όπου κάνουμε τομή, να βάζουμε την δύναμη με φορά προς τον απέναντι κόμβο. Αν είναι γνωστή και θλιπτική, η τιμή της θα είναι αρνητική.
 - $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{23} - (-28,12) - (-36,02)\cos(\varphi) + N_{27}\cos(\varphi) = 0$
 - $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_{27}\sin(\varphi) - (-36,02)\sin(\varphi) - 15 = 0 \Rightarrow N_{27} = +12,01\text{kN}$
- Άρα $N_{23} + 28,12 + 36,02\cos(\varphi) + 12,01\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{23} = -65,62\text{kN}$

Άσκηση 4.1

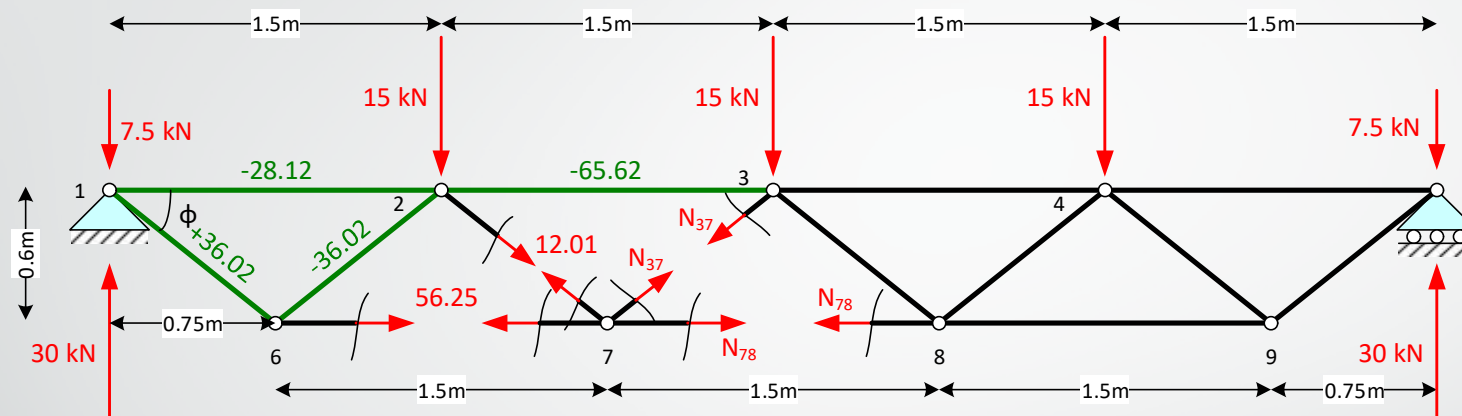
- Ισορροπία κόμβου 2.



- Επόμενη ισορροπία κόμβου 7 (δύο άγνωστοι: N_{37} , N_{78} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).
- Δεν θα μπορούσα να προχωρήσω με τον κόμβο 3 (τρεις άγνωστοι: N_{37} , N_{38} , N_{34} , και δύο εξισώσεις ισορροπίας).

Άσκηση 4.1

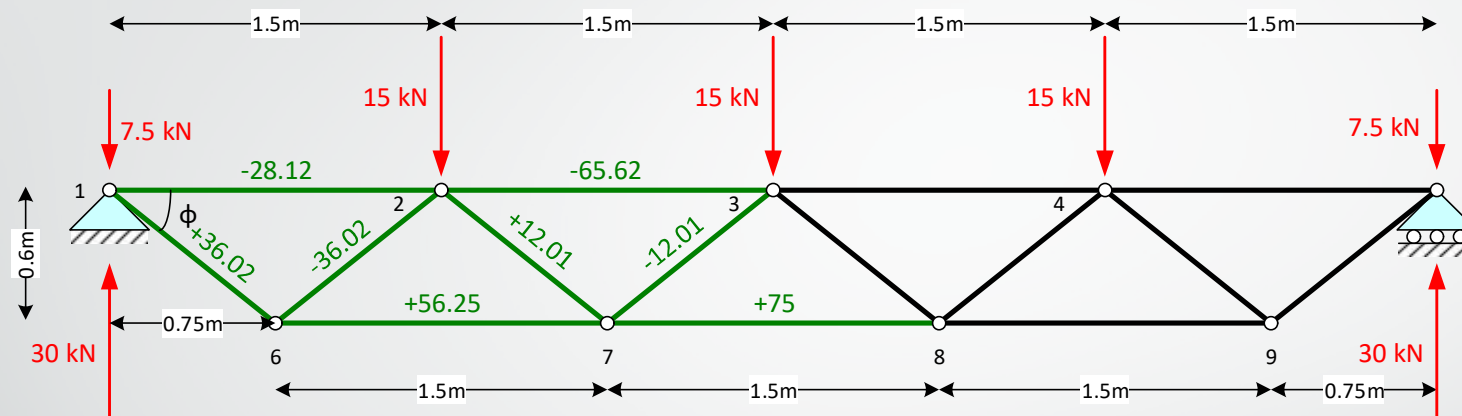
- Ισορροπία κόμβου 7.



- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{78} - 56,25 - 12,01\cos(\varphi) + N_{37}\cos(\varphi) = 0$
- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{37}\sin(\varphi) + 12,01\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{37} = -12,01\text{kN}$
- Άρα $N_{78} - 56,25 - 12,01\cos(\varphi) - 12,01\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{78} = +75\text{kN}$

Άσκηση 4.1

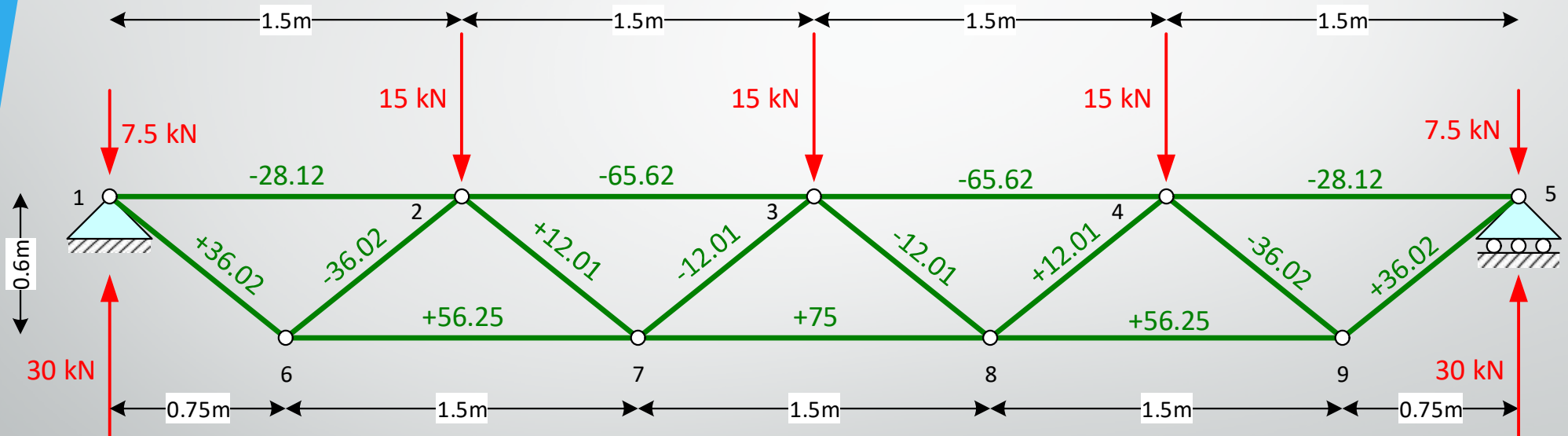
- Ως τώρα έχουμε βρει:



- Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο.
- Ή:

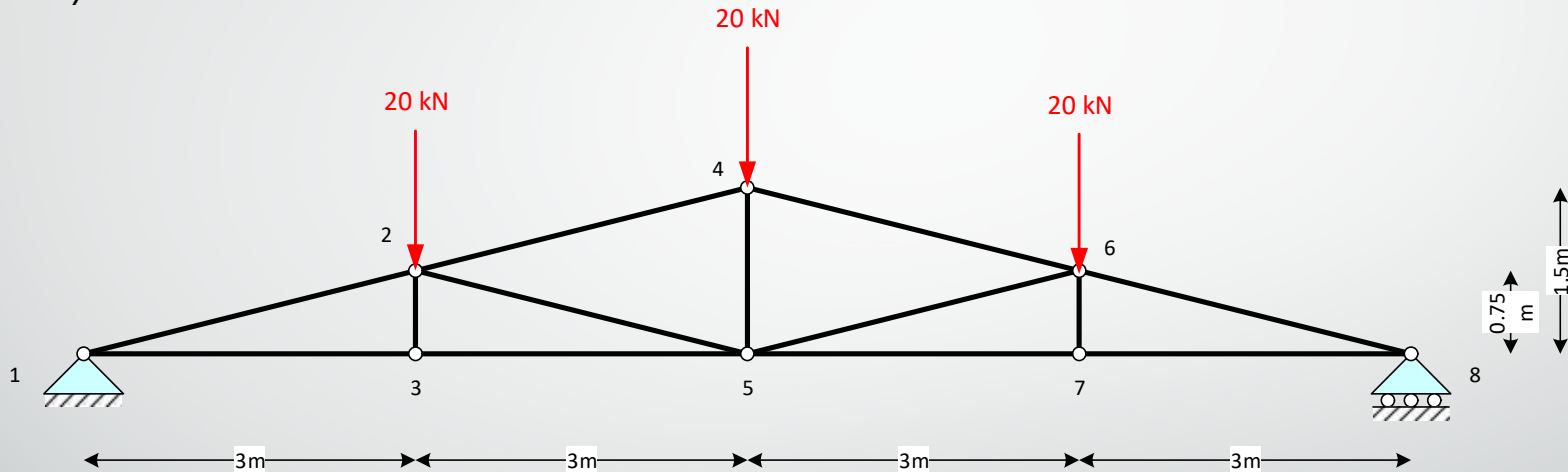
Άσκηση 4.1

- Λόγω συμμετρίας φορέα ΚΑΙ φόρτισης, συμπληρώνω συμμετρικά τα υπόλοιπα:



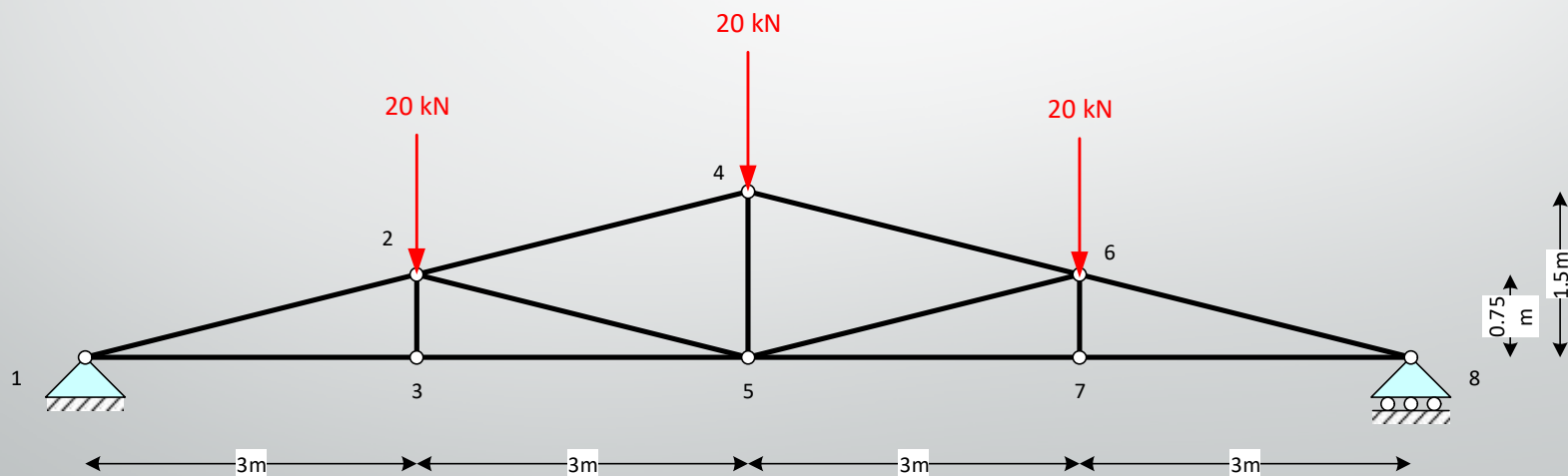
Άσκηση 4.2

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών του άνω πέλματος (N_{12} , N_{24} , N_{46} , N_{68}) και κάτω πέλματος (N_{13} , N_{35} , N_{57} , N_{78}) με χρήση τομών Ritter.



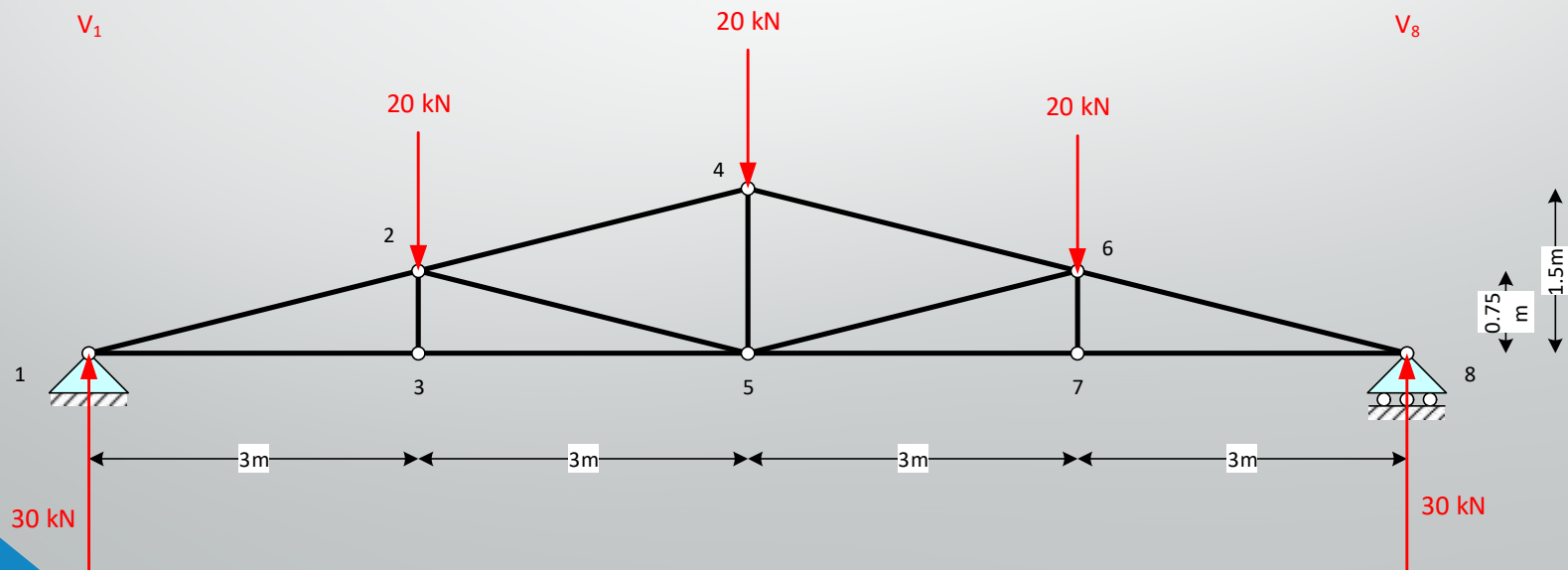
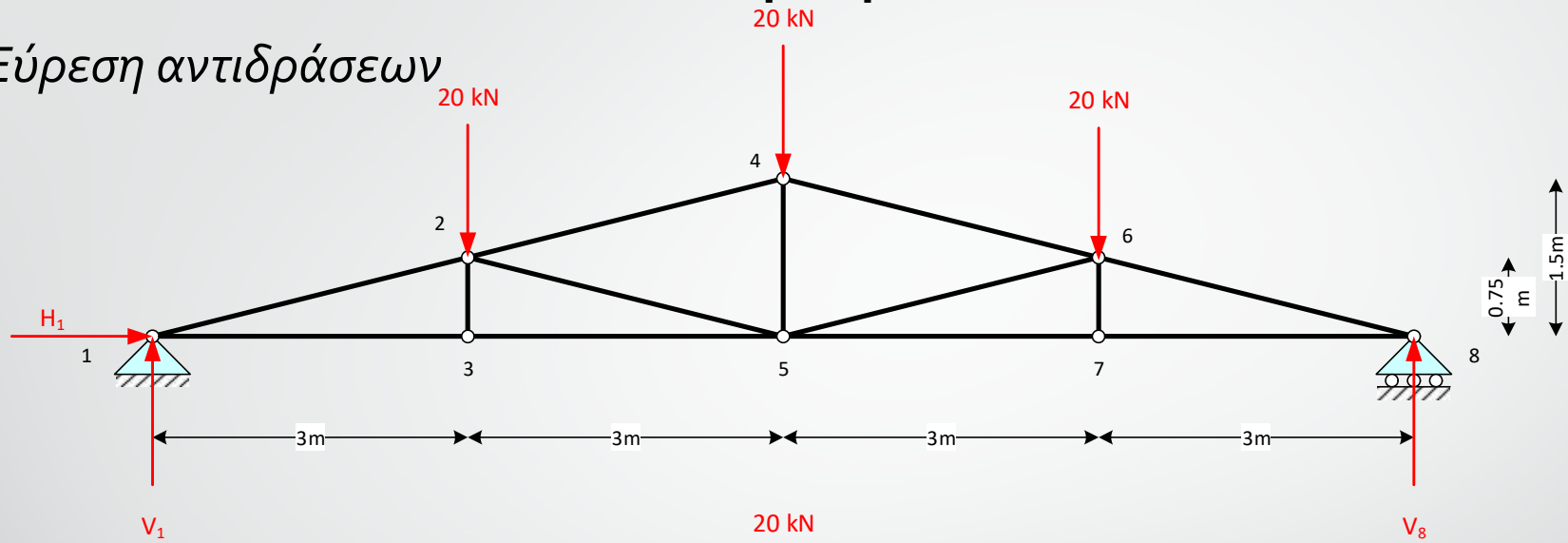
Άσκηση 4.2

- Το δικτύωμα είναι αμφιέρειστα στηριγμένο (εξωτερικά ισοστατικό).
- Ισχύει η σχέση $\rho = 2\kappa - 3$ αφού $\rho = 13$, $\kappa = 8$. Εσωτερικά είναι ευσταθές ως παράθεση τριγώνων χωρίς επικάλυψη, άρα είναι και εσωτερικά ισοστατικό.
- Θεωρείται ότι τα μέλη είναι αβαρή και οι αρθρώσεις λειτουργούν χωρίς τριβές.



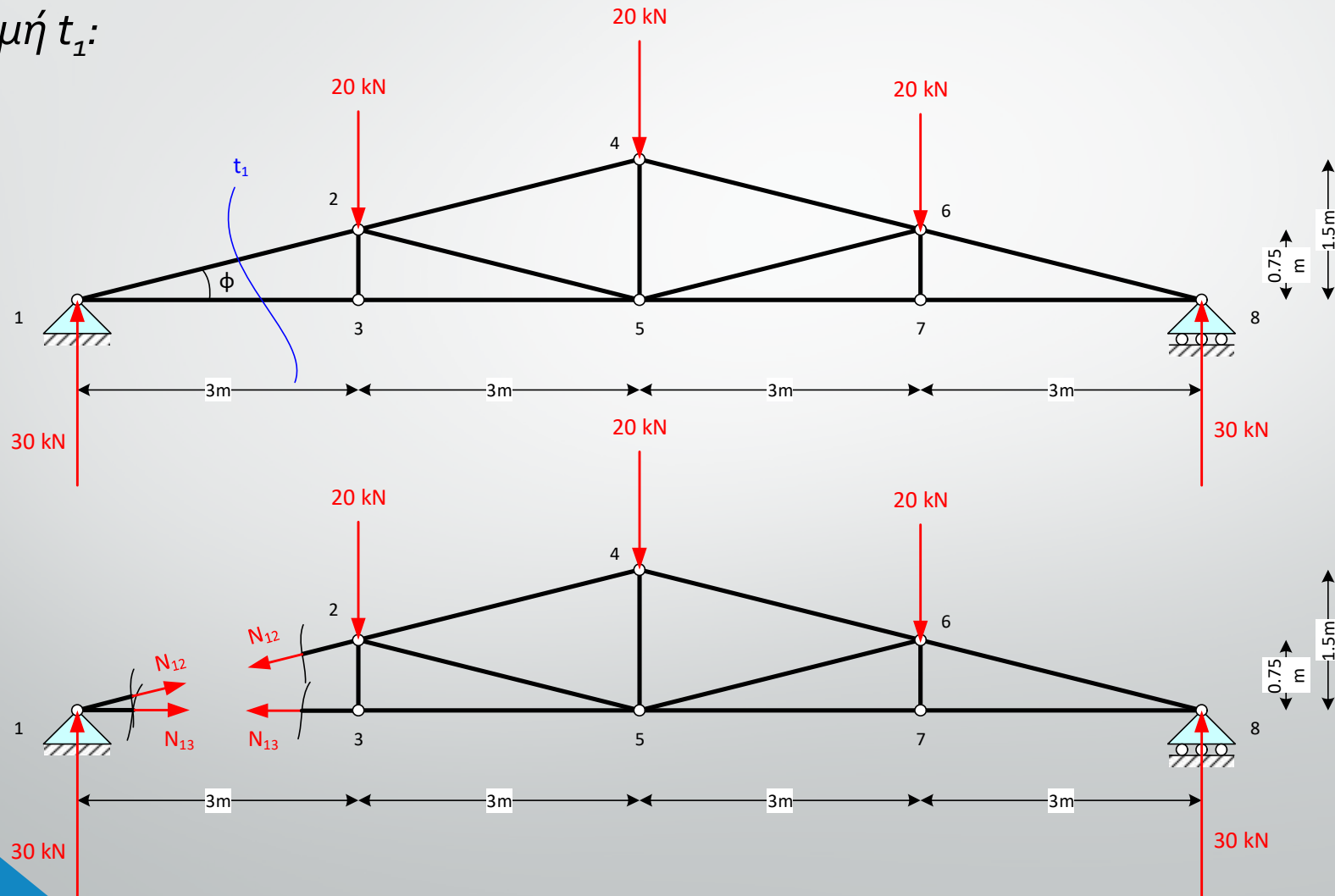
Άσκηση 4.2

- Εύρεση αντιδράσεων



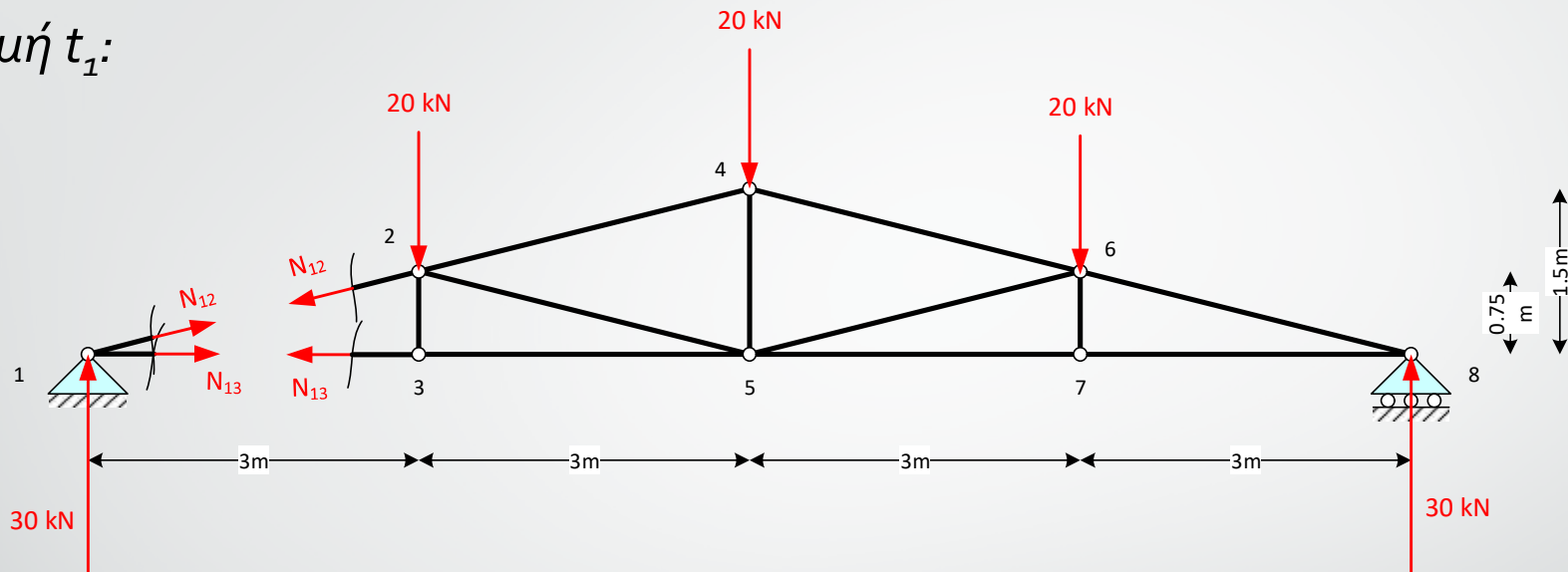
Άσκηση 4.2

■ Τομή t_1 :



Άσκηση 4.2

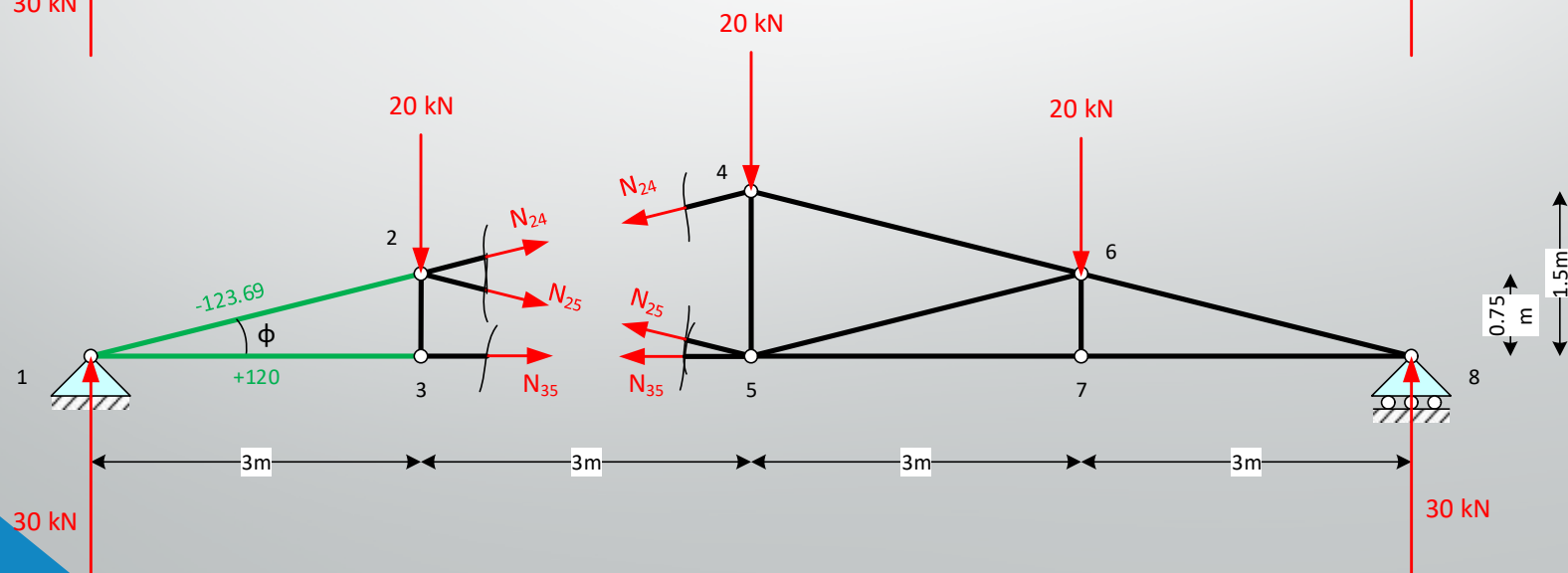
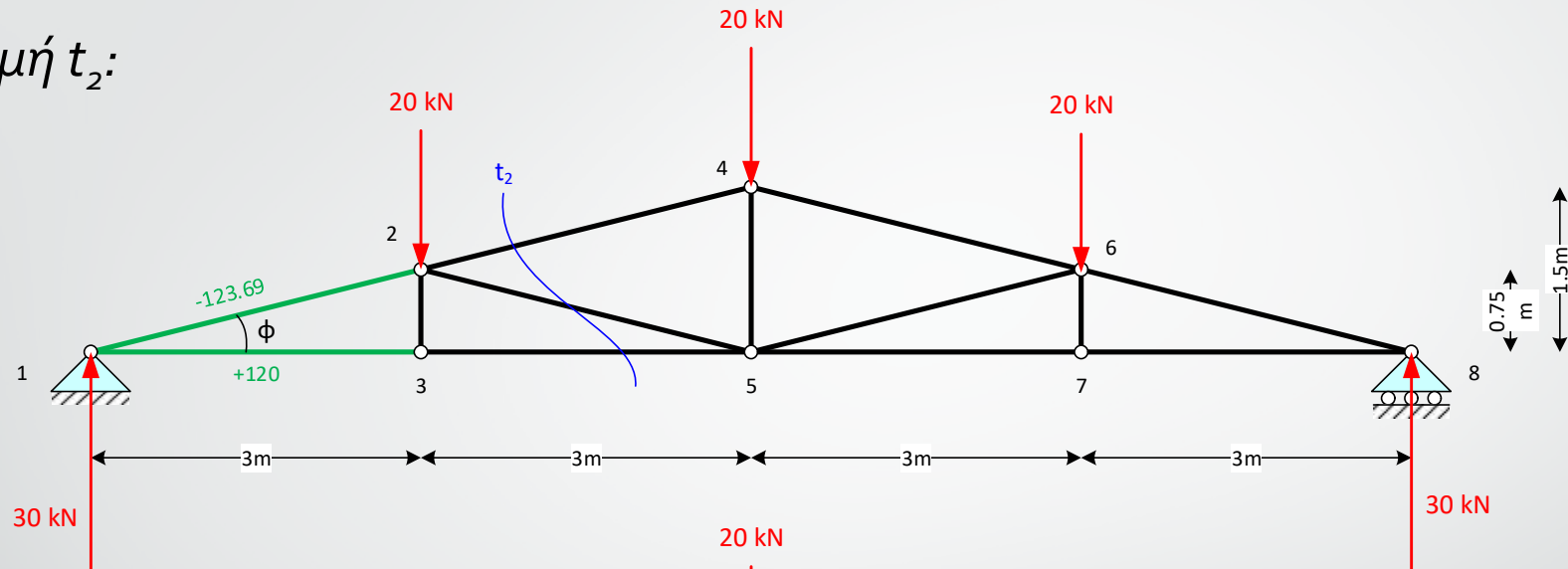
- Τομή t_1 :



- $\varphi = \arctan\left(\frac{1,5}{6}\right) \Rightarrow \varphi \cong 14,036^\circ$
- $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{13} + N_{12} \cos(\varphi) = 0$
- $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{12} \sin(\varphi) + 30 = 0 \Rightarrow N_{12} = -123,69 \text{ kN}$
- Προκύπτει $N_{13} - 123,69 \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow N_{13} = +120 \text{ kN}$

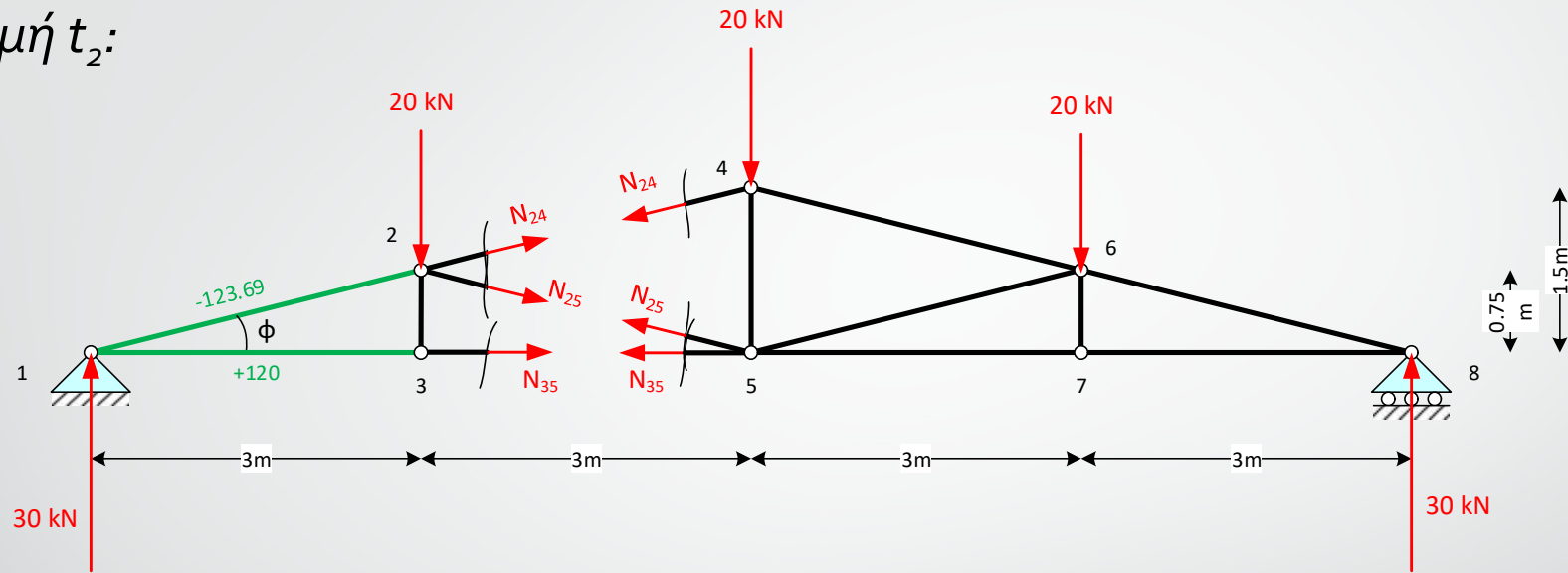
Άσκηση 4.2

■ Τομή t_2 :



Άσκηση 4.2

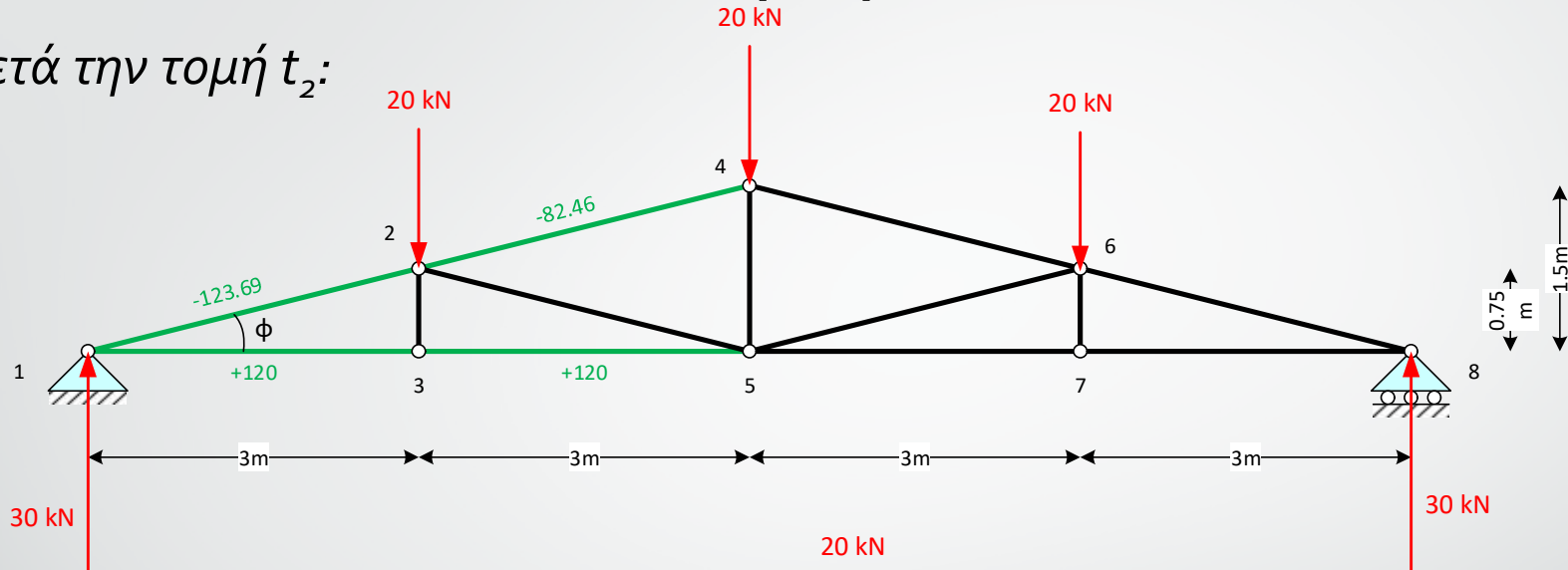
- Τομή t_2 :



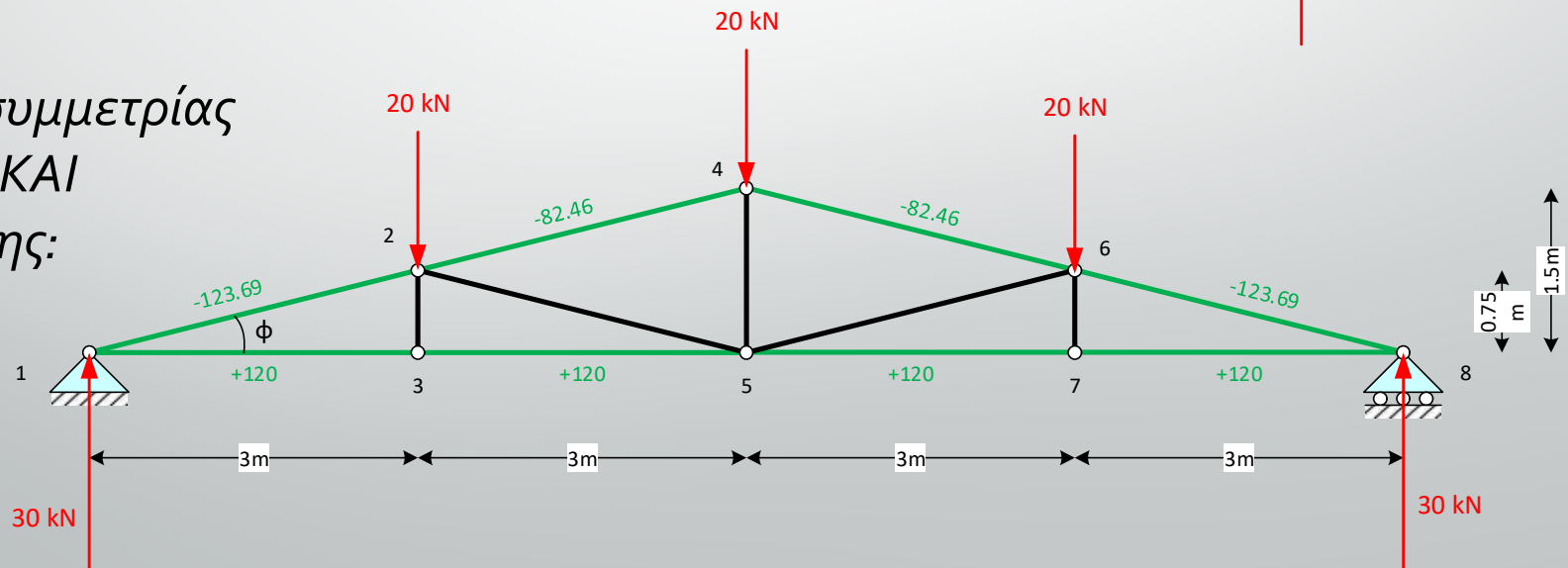
- $\sum M_{(1)} = 0 \xrightarrow{+\Sigma\Delta\Omega} N_{25} \cos(\varphi) \times 0.75 + N_{25} \sin(\varphi) \times 3 + 20 \times 3 = 0 \Rightarrow N_{25} = -41.23 \text{ kN}$ (Όπου χρησιμοποιείται στην συνέχεια το N_{25} βάζω -41.23)
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{25} \sin(\varphi) + N_{24} \sin(\varphi) + 30 - 20 = 0 \Rightarrow N_{24} = -82.46 \text{ kN}$
- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{25} \cos(\varphi) + N_{24} \cos(\varphi) + N_{35} = 0 \Rightarrow N_{35} = +120 \text{ kN}$

Άσκηση 4.2

- Μετά την τομή t_2 :

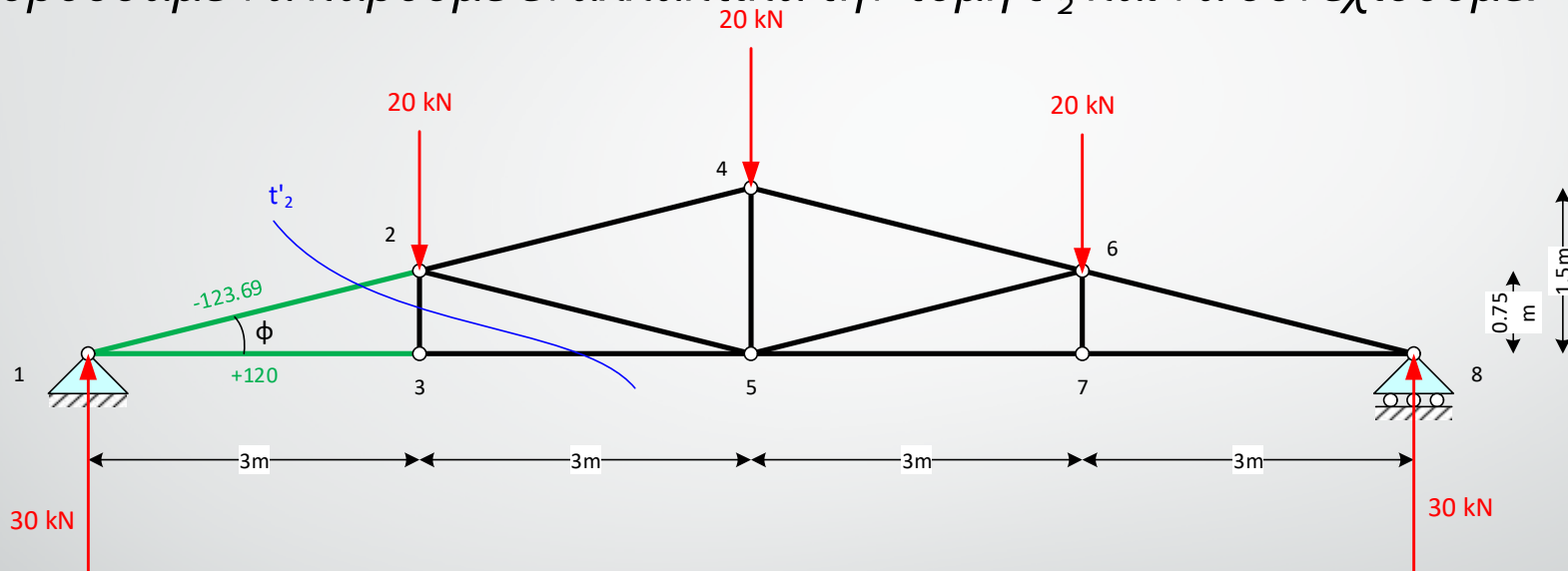


- Λόγω συμμετρίας φορέα ΚΑΙ φόρτισης:



Άσκηση 4.2

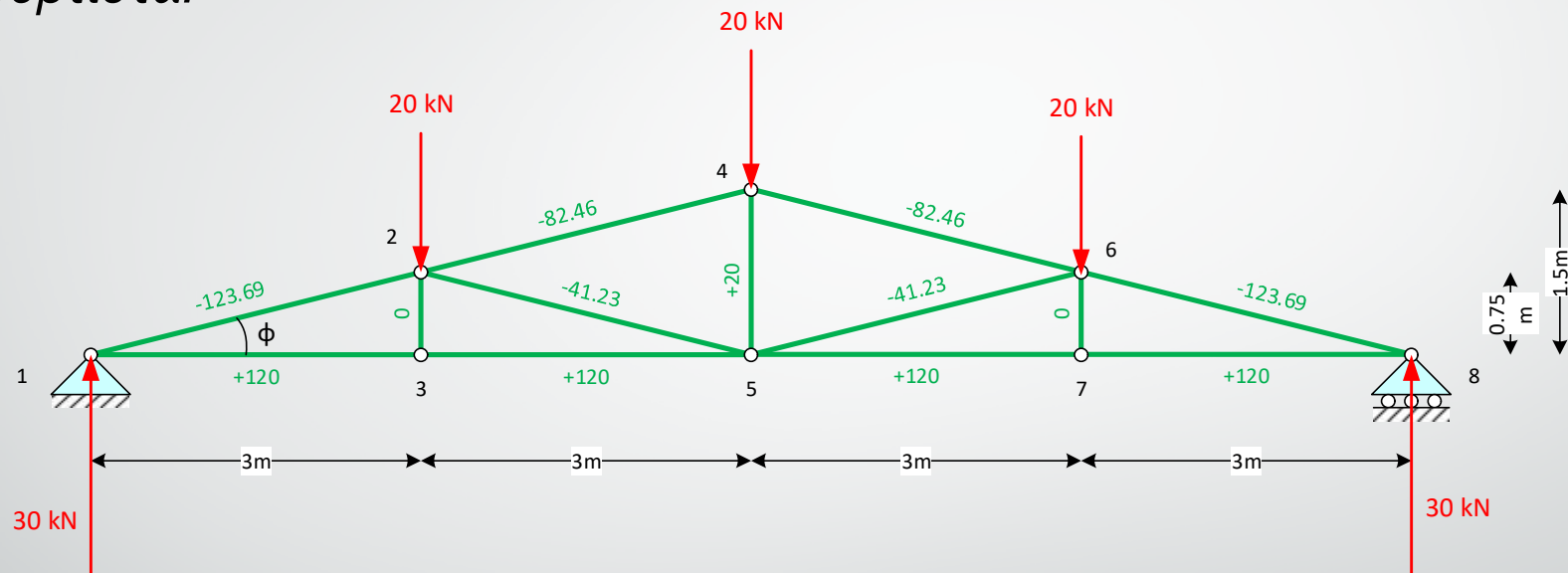
- Αν θέλαμε να βρούμε και τις δυνάμεις των υπόλοιπων μελών, θα μπορούσαμε να πάρουμε εναλλακτικά την τομή t'_2 και να συνεχίσουμε.



- Ή, αν επιτρεπόταν, θα μπορούσαμε να πάρουμε την ισορροπία του κόμβου 3. Γενικότερα υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης, κάποιοι όμως είναι πιο απλοί.
- Γενικά, για να βρω όλες τις δυνάμεις των ράβδων που τέμνω, με ισορροπία κόμβων θα πρέπει να έχω ως δύο αγνώστους, με τομή Ritter ως τρεις αγνώστους.

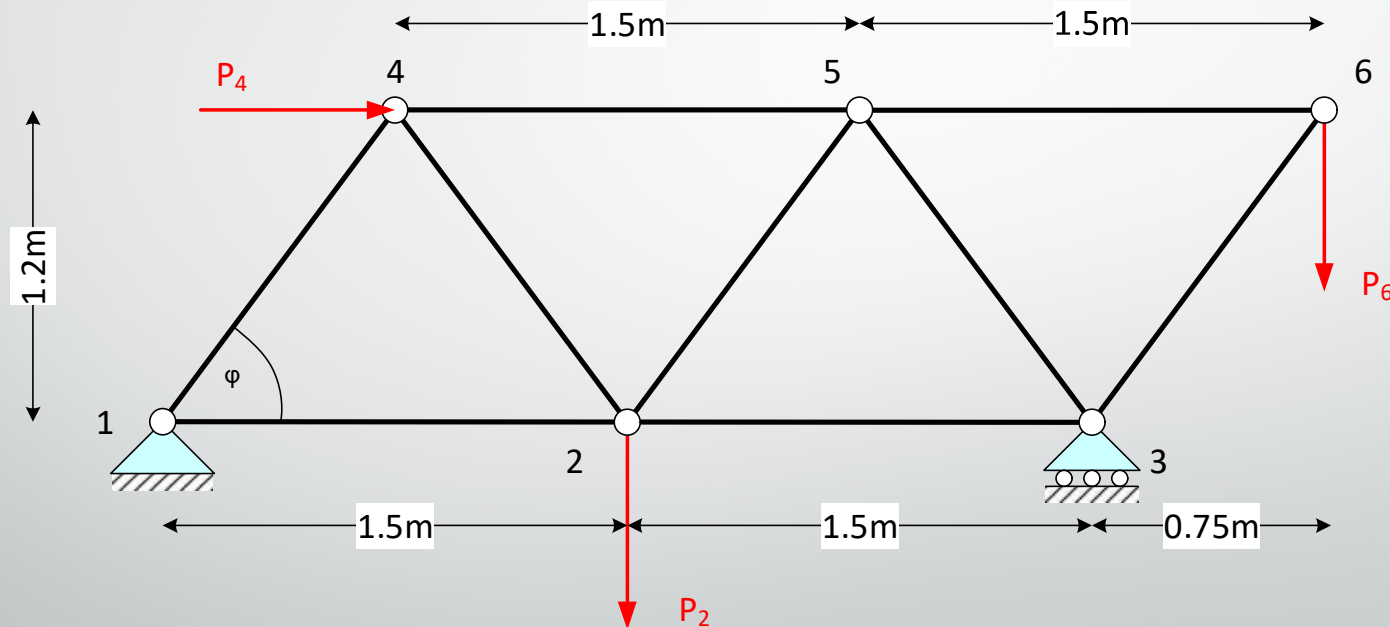
Άσκηση 4.2

- Τα τελικά αποτελέσματα σε kN φαίνονται παρακάτω. Κάποια μέλη είναι αφόρτιστα.



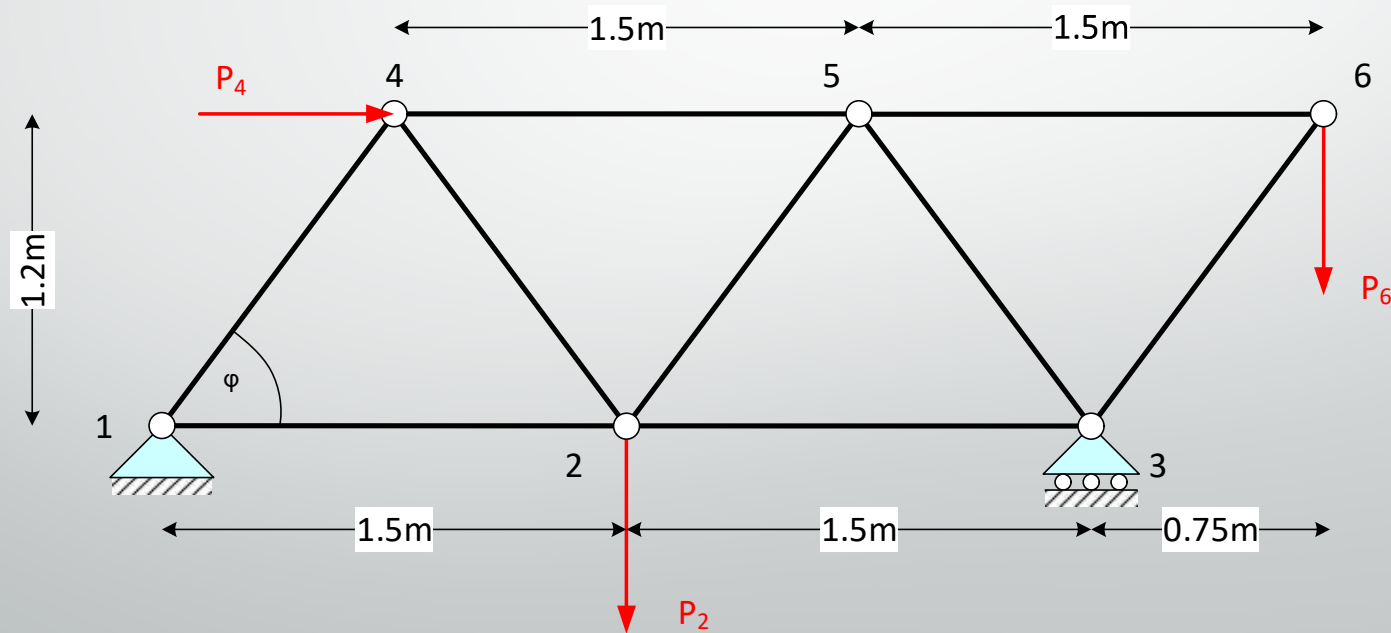
Άσκηση 4.3

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών του. Δίνεται $P_2=9\text{kN}$, $P_4=4\text{kN}$, $P_6=4\text{kN}$.



Άσκηση 4.3

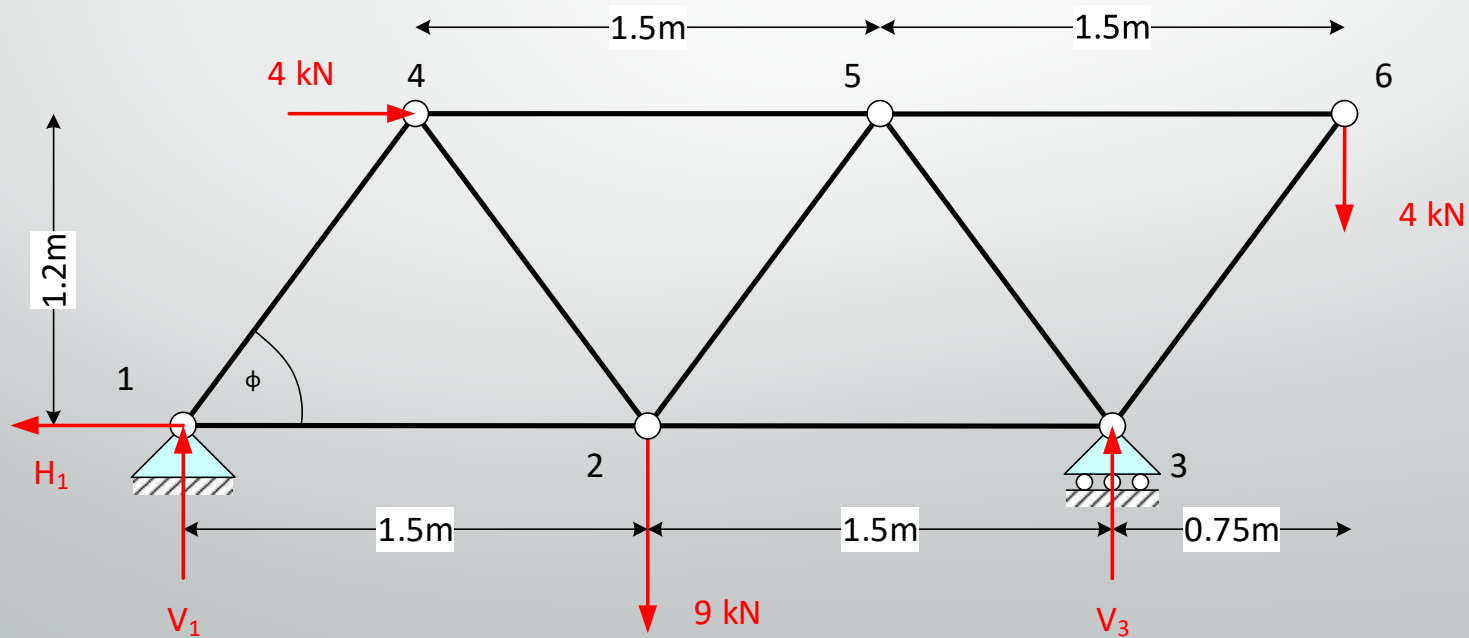
- Το δικτύωμα είναι αμφιέρειστα στηριγμένο (εξωτερικά ισοστατικό).
- Ισχύει η σχέση $\rho = 2\kappa - 3$ αφού $\rho = 9$, $\kappa = 6$. Εσωτερικά είναι ευσταθές ως παράθεση τριγώνων χωρίς επικάλυψη, άρα είναι και εσωτερικά ισοστατικό.
- Θεωρείται ότι τα μέλη είναι αβαρή και οι αρθρώσεις λειτουργούν χωρίς τριβές.



Άσκηση 4.3

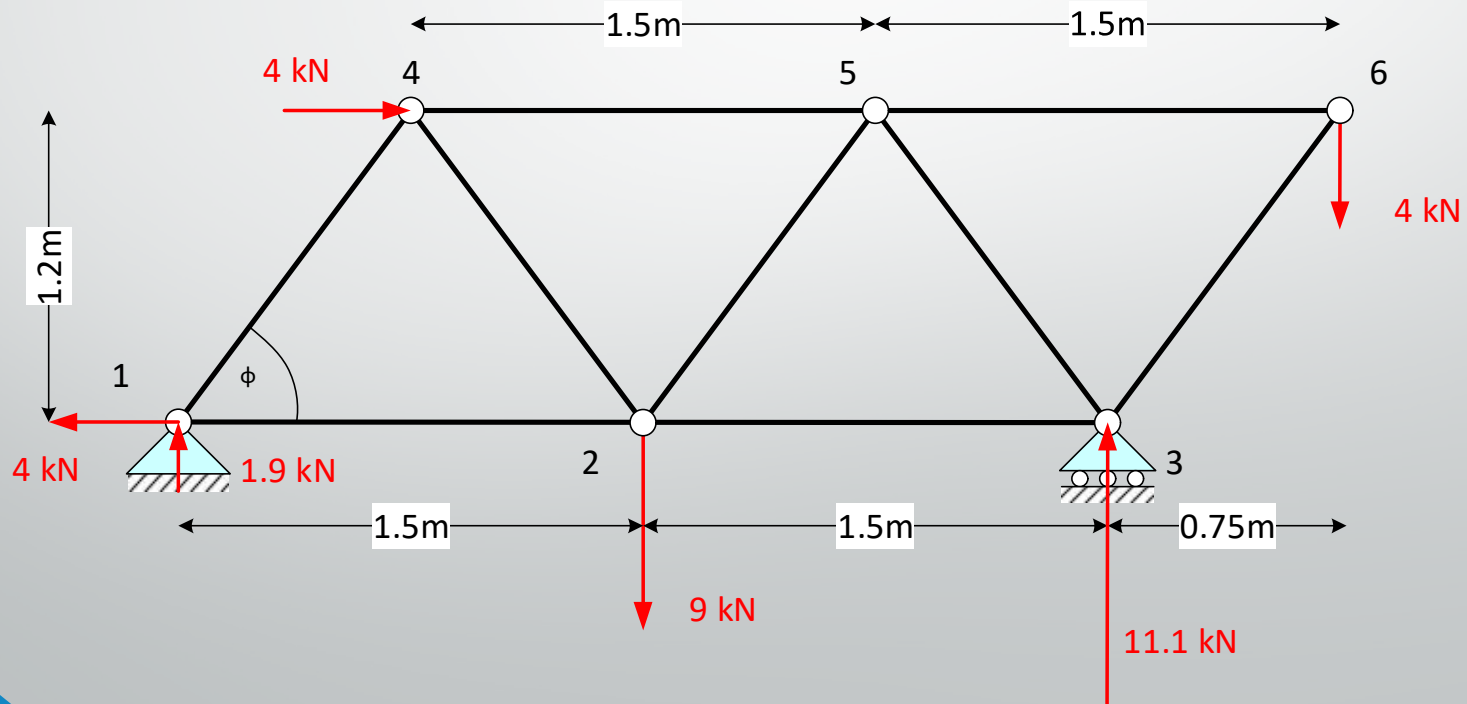
- Εύρεση αντιδράσεων:

- $H_1 = 4 \text{ kN}$, με φορά προς τα αριστερά
- $V_1 = 1,9 \text{ kN}$, με φορά προς τα πάνω
- $V_3 = 11,1 \text{ kN}$, με φορά προς τα πάνω.



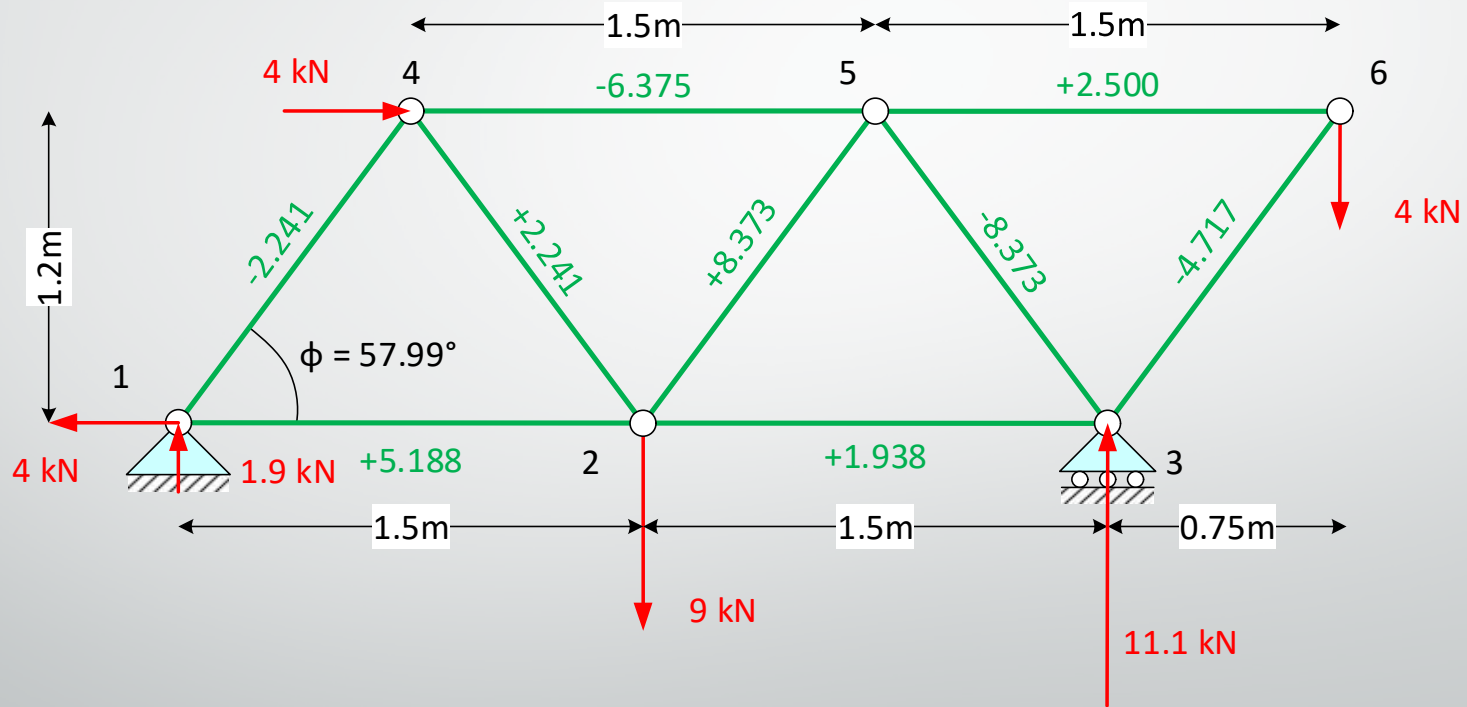
Άσκηση 4.3

- Επίλυση (προσοχή ΔΕΝ υπάρχει κάποια συμμετρία):
 - Με διαδοχικές ισορροπίες κόμβων: 1, 4, 2, 5, 3.
 - Με διαδοχικές ισορροπίες κόμβων: 6, 3, 5, 2, 4.
 - Με συνδυασμό ισορροπιών κόμβων και τομών Ritter.



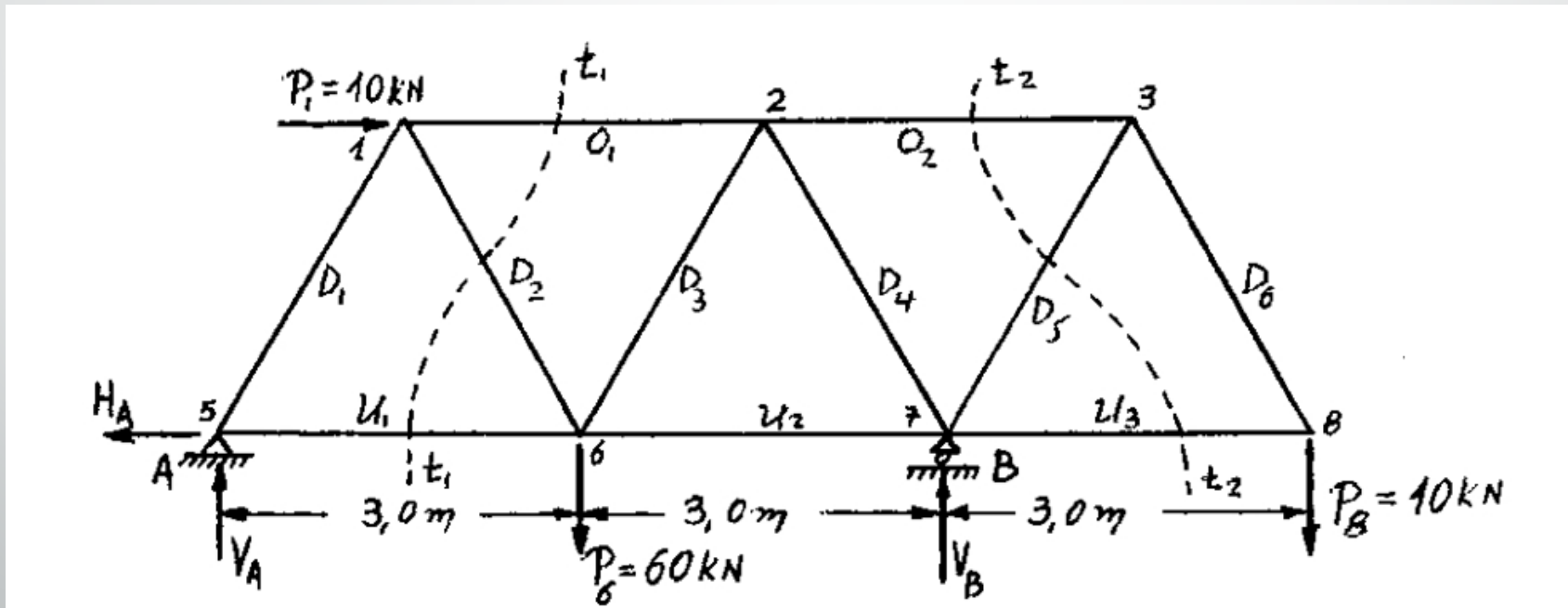
Άσκηση 4.3

- Τα τελικά αποτελέσματα σε kN φαίνονται παρακάτω.



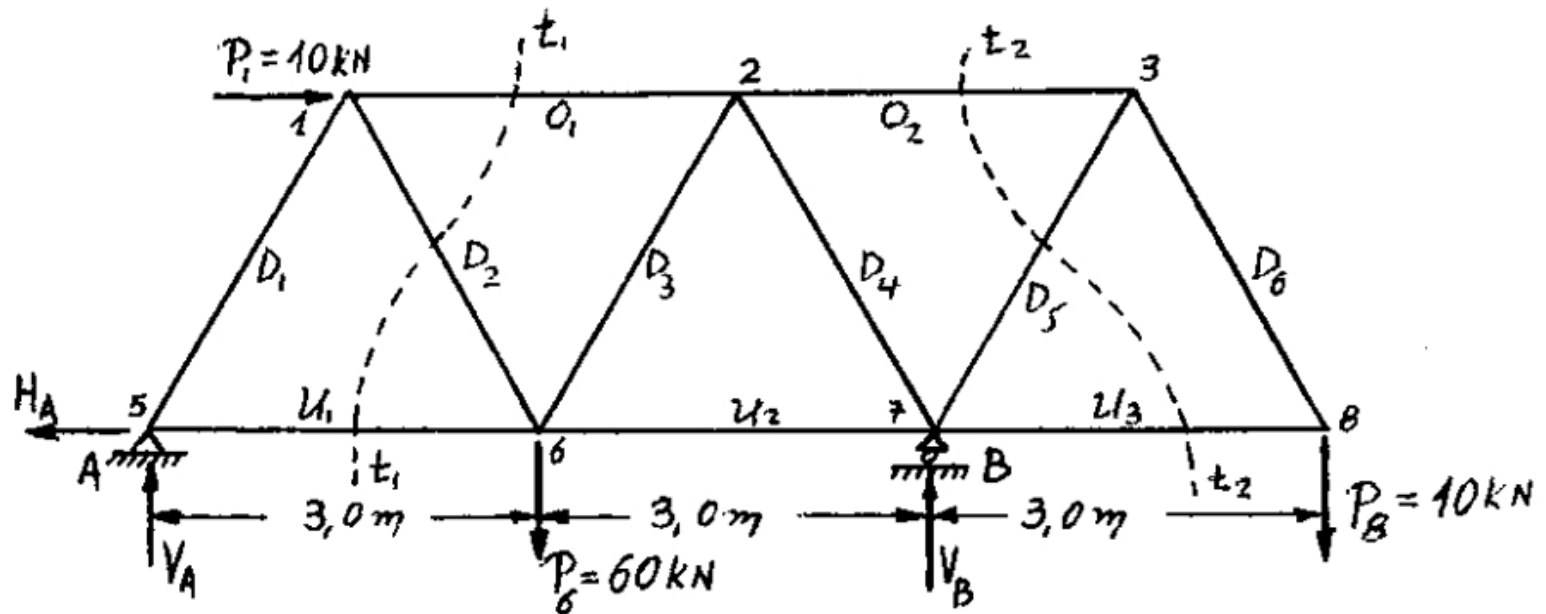
Άσκηση 4.4

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών που τέμνονται από τις τομές Ritter που υποδεικνύονται. Το μήκος όλων των ράβδων είναι 3 m.



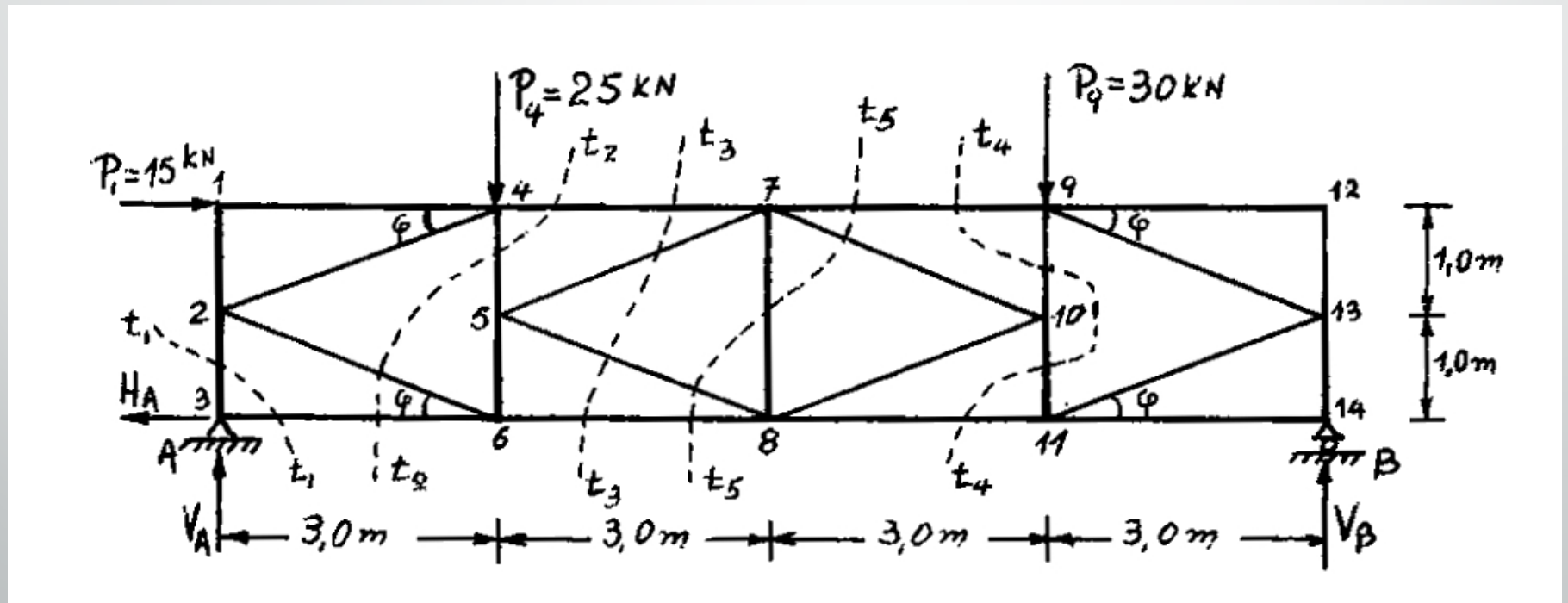
Άσκηση 4.4

- Αποτελέσματα:
- Αντιδράσεις στήριξης: $H_A = 10 \text{ kN}$, $V_A = 20,67 \text{ kN}$, $V_B = 49,33 \text{ kN}$.
- Τομή t_1 : $O_1 = -33,87 \text{ kN}$, $U_1 = +21,93 \text{ kN}$, $D_2 = +23,86 \text{ kN}$.
- Τομή t_2 : $O_2 = +11,55 \text{ kN}$, $U_3 = -5,77 \text{ kN}$, $D_5 = -11,55 \text{ kN}$.



Άσκηση 4.5

- Να επιλυθεί το παρακάτω επίπεδο δικτύωμα και να υπολογιστούν οι δυνάμεις των μελών που τέμνονται από τις τομές Ritter που υποδεικνύονται (και ενδεχομένως άλλες που χρειάζεστε).



Άσκηση 4.5

- Αποτελέσματα:
- Αντιδράσεις στήριξης: $H_A = 15 \text{ kN}$, $V_A = 23,75 \text{ kN}$, $V_B = 31,25 \text{ kN}$.
- $N_{36} = +15 \text{ kN}$, $N_{23} = -23,75 \text{ kN}$, $N_{47} = -50,625 \text{ kN}$, $N_{26} = +37,55 \text{ kN}$, $N_{45} = -13,125 \text{ kN}$, $N_{68} = 50,625 \text{ kN}$, $N_{58} = -1,98 \text{ kN}$, $N_{57} = +1,98 \text{ kN}$, $N_{79} = -46,875 \text{ kN}$, $N_{8-11} = +46,875 \text{ kN}$, $N_{78} = 0$, $N_{9-10} = -14,37 \text{ kN}$, $N_{10-11} = -15,63 \text{ kN}$, $N_{7-10} = -1,98 \text{ kN}$.

