Στατική αοριστία

(εξωτερική)

Στατική αοριστία (εξωτερική)

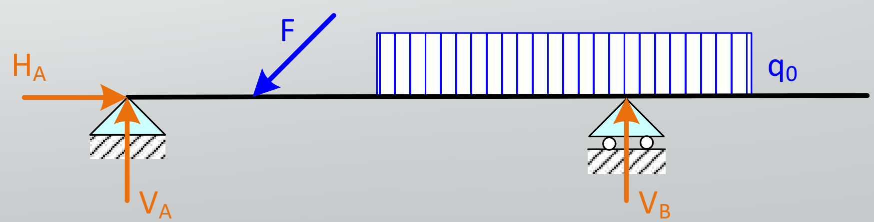
- *Τι είναι η στατική αοριστία;*

Είδαμε ότι ένα ελεύθερο σώμα θα πρέπει να είναι σε ισορροπία υπό την επίδραση όλων των εξωτερικών δυνάμεων, **συμπεριλαμβανομένων των αντιδράσεων στήριξης**.

Ενώ οι φορτίσεις που δρουν πάνω σε ένα σώμα είναι γνωστές, οι αντιδράσεις στήριξης είναι άγνωστες και πρέπει να υπολογιστούν. Είδαμε ότι για αυτόν τον λόγο χρησιμοποιούμε τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας (3 το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις στην περίπτωση του επίπεδου προβλήματος).

Όταν οι στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας οδηγούν σε μία και μοναδική λύση για τις αντιδράσεις στήριξης, τότε λέμε ότι η στατική αοριστία του φορέα είναι μηδέν ή, ισοδύναμα, ότι ο φορέας είναι (εξωτερικά) ισοστατικός.

Παράδειγμα:
(3 άγνωστοι, 3 εξισώσεις)

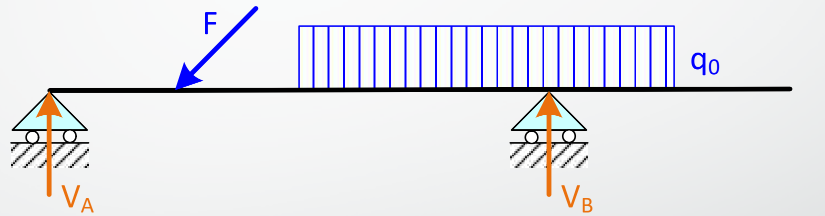


Στατική αοριστία (εξωτερική)

- *Τι είναι η στατική αοριστία;*

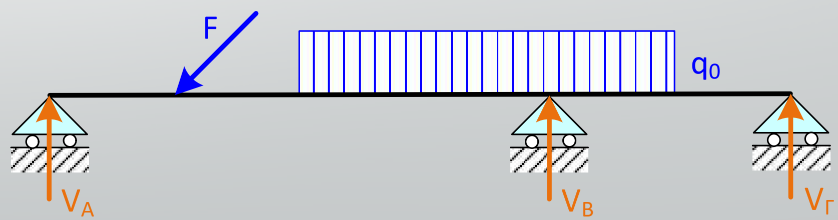
Όταν το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας είναι ασύμβατο, τότε ο φορέας δεν είναι στηριγμένος σωστά και παρουσιάζει κινητότητα. Δηλαδή, δεν μπορεί να ισορροπήσει υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων και των συγκεκριμένων στηρίξεων. **Τότε λέμε ότι είναι μηχανισμός**.

Παράδειγμα:
(3 εξισώσεις, 2 άγνωστοι,
$\Sigma \mathrm{F}_x = 0$ δεν έχει λύση)



Μηχανισμός

Προσοχή: **το πλήθος των αγνώστων δεν αποτελεί κριτήριο για το αν έχουμε μηχανισμό ή όχι!** Παράδειγμα:
(3 εξισώσεις, 3 άγνωστοι
$\Sigma \mathrm{F}_x = 0$ πάλι δεν έχει λύση)



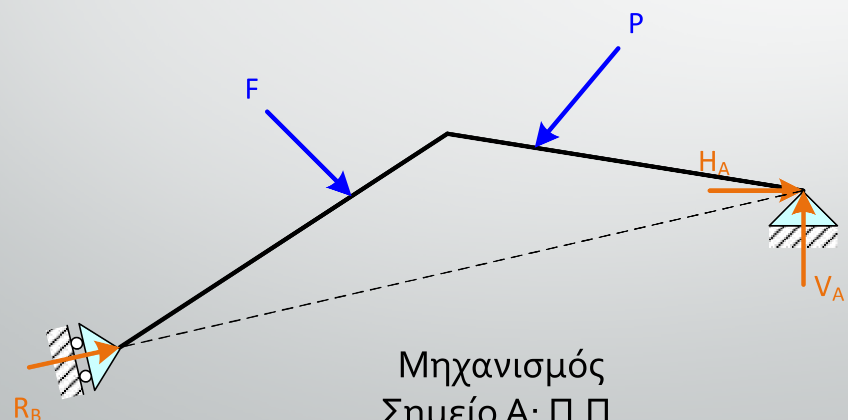
Μηχανισμός

Στατική αοριστία (εξωτερική)

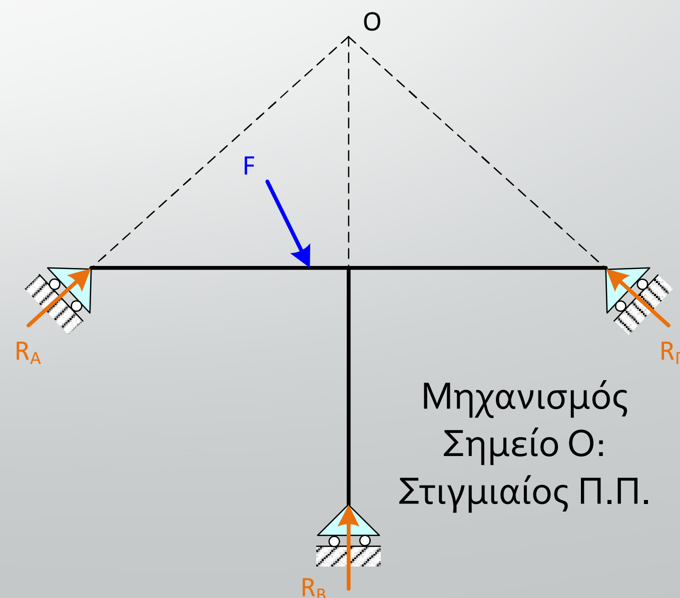
- *Τι είναι η στατική αοριστία;*

Προσοχή: **το πλήθος των αγνώστων δεν αποτελεί κριτήριο για το αν έχουμε μηχανισμό ή όχι!** Παράδειγμα:
(3 εξισώσεις, 3 άγνωστοι
$\Sigma M^{A} = 0$ δεν έχει λύση)

Μηχανισμός
Σημείο Α: Πόλος Περιστροφής (Π.Π.)

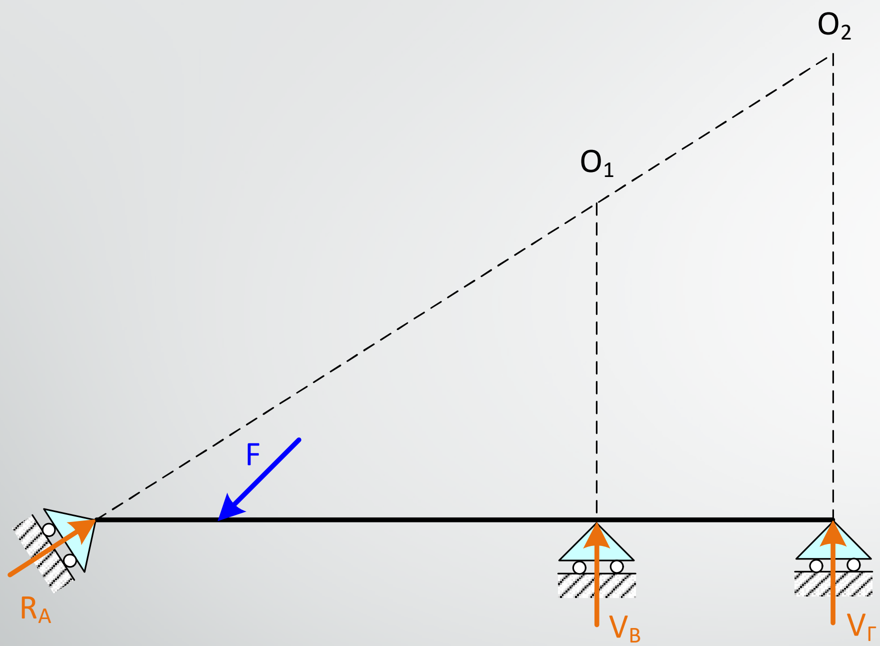


Μηχανισμός
Σημείο Α: Π.Π.

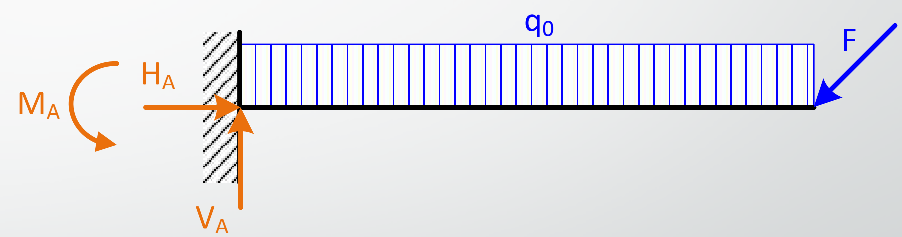


Μηχανισμός
Σημείο Ο:
Στιγμιαίος Π.Π.

Στατική αοριστία (εξωτερική)



Σταθερή στήριξη,
ισοστατικός φορέας

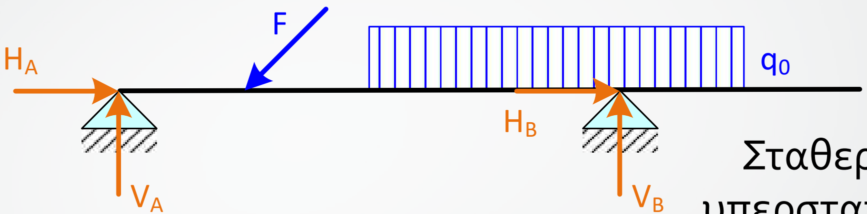


Σταθερή στήριξη,
ισοστατικός φορέας

Στατική αοριστία (εξωτερική)

Όταν το σύστημα των εξισώσεων έχει άπειρες λύσεις, τότε ο φορέας λέμε ότι είναι εξωτερικά υπερστατικός.

Παράδειγμα:
(3 εξισώσεις, 4 άγνωστοι)



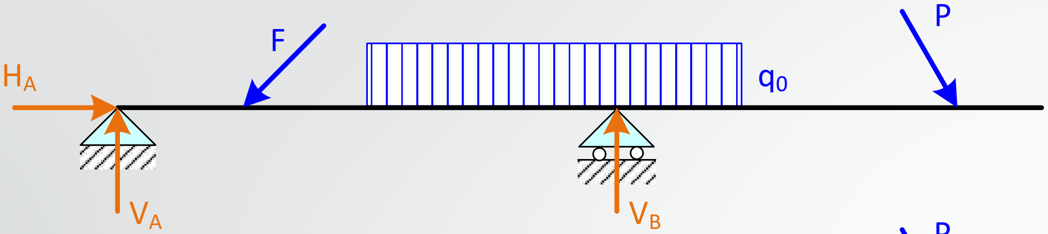
Σταθερή στήριξη,
υπερστατικός φορέας

Στην εν λόγω περίπτωση **ο φορέας είναι μία φορά (4-3=1) εξωτερικά υπερστατικός. Εναλλακτικά, λέμε ότι ο βαθμός στατικής αοριστίας είναι 1.**

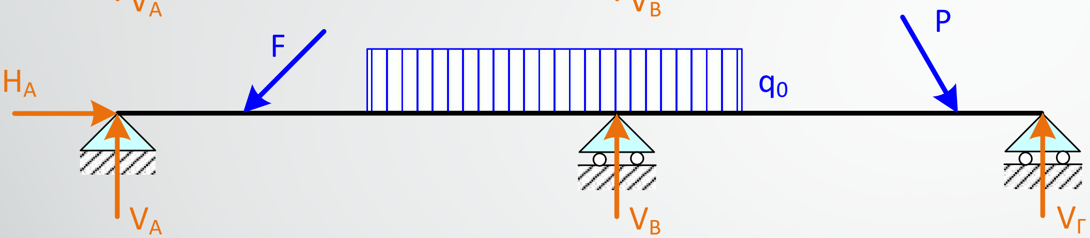
Σημείωση: στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα V_A, V_B μπορούν να προσδιοριστούν! Η εξίσωση $\Sigma M^A = 0$ δίνει την V_B και η $\Sigma M^{\mathrm{B}} = 0$ ή η $\Sigma \mathrm{F}_y = 0$ δίνει την V_A.

Με βάση την $\Sigma \mathrm{F}_x = 0$ όμως, για κάθε H_A προκύπτει ένα $\mathrm{H_B} = Fcos(\varphi) - \mathrm{H}_A$. Οποιαδήποτε άλλη σχέση εμπλέκει τα H_A και $\mathrm{H_B}$, οδηγεί σε απροσδιοριστία.

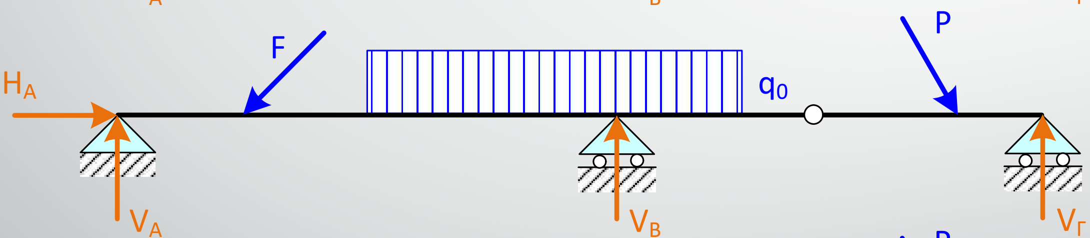
Στατική αοριστία (εξωτερική)



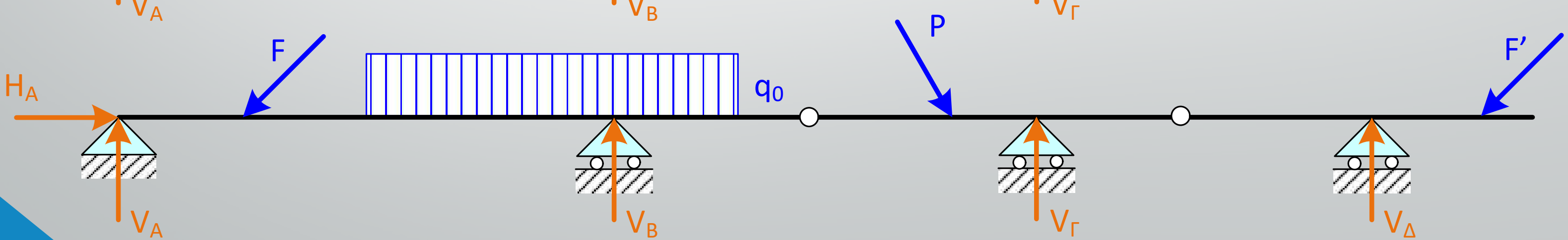
Μονοπροέχουσα δοκός: Σταθερή στήριξη, ισοστατικός φορέας (3-3=0)



Συνεχής δοκός δύο ανοιγμάτων: Σταθερή στήριξη, μία φορά στατικά αόριστη (4-3=1)

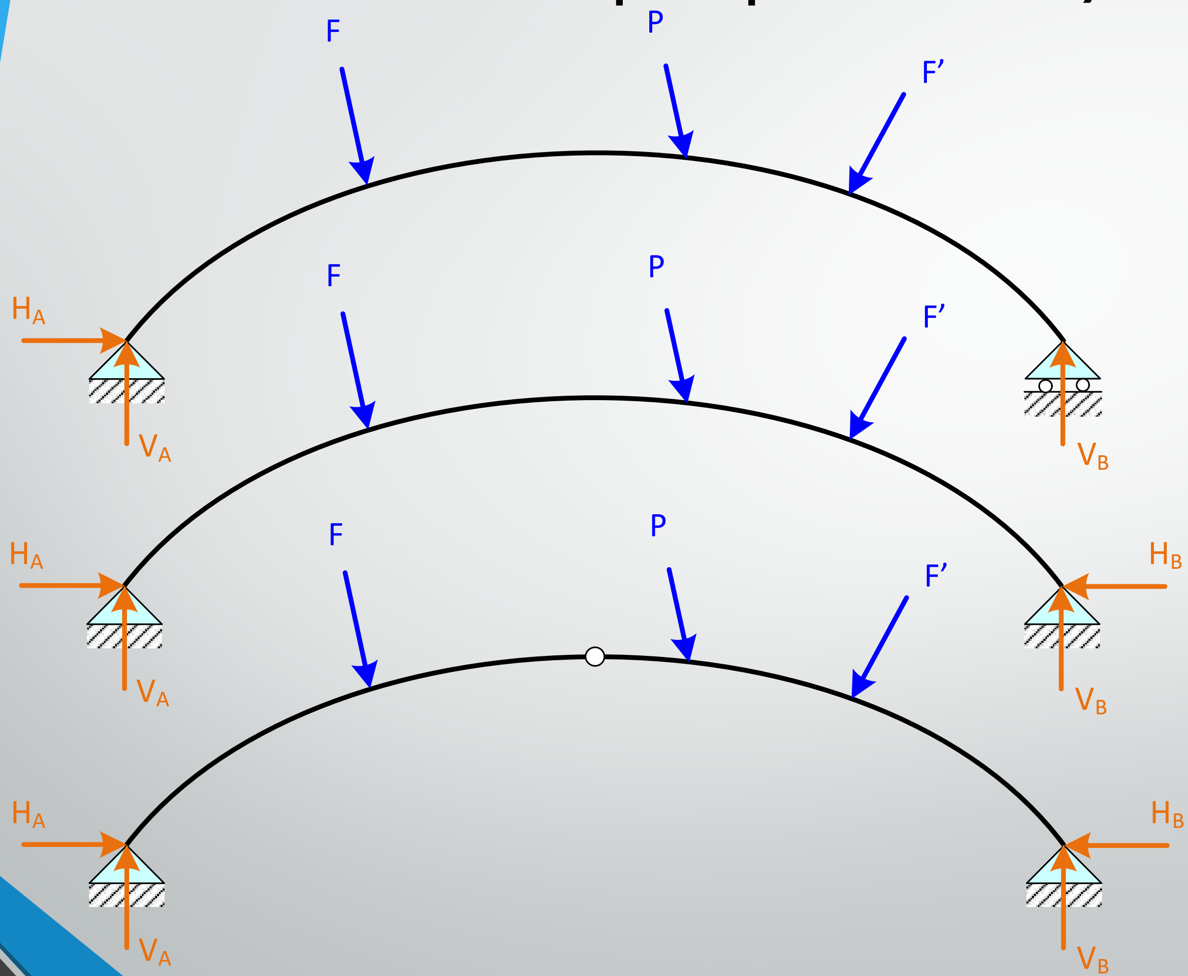


Πολυαρθρωτή Δοκός Gerber: Σταθερή στήριξη, ισοστατική (4-3-1=0)



Gerber Σταθερή στήριξη, ισοστατική (5-3-2=0)

Στατική αοριστία (εξωτερική)



Αμφιέρειστη καμπύλη δοκός: Σταθερή στήριξη, ισοστατικός φορέας (3-3=0)

Αμφιαρθρωτή καμπύλη δοκός: Σταθερή στήριξη, υπερστατικός φορέας με στατική αοριστία 1 (4-3=1)

Τριαρθρωτό τόξο: Σταθερή στήριξη (μόνο αν οι 3 αρθρώσεις δεν κείτονται επί της ίδιας ευθείας! αλλιώς μηχανισμός), ισοστατικός φορέας (4-3-1=0)

Στατική αοριστία (εξωτερική)

Χρησιμοποιώντας Γραμμική Άλγεβρα, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της στατικής αοριστίας με μαθηματικούς όρους. Υπενθυμίζουμε:

- Το γραμμικό σύστημα εξισώσεων μπορεί να γραφεί στην μορφή $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, όπου $\mathrm{A} =$ πίνακας συντελεστών με διάσταση $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$, και $\mathrm{B} =$ πίνακας-στήλη των σταθερών όρων.
- **Η βαθμίδα (rank) του A δίνει το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων εξισώσεων**. Η βαθμίδα ενός πίνακα είναι το πλήθος των καθοδηγητικών μονάδων όταν ο A έρθει σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών (reduced row echelon form).
- **Αν $\mathbf{m} > \mathbf{rank}(\mathbf{A})$, τότε $\mathbf{m} - \mathbf{rank}(\mathbf{A})$ εξισώσεις είναι γραμμικώς εξαρτημένες από τις υπόλοιπες**. (*Το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων εξισώσεων ισορροπίας που μπορούμε να γράψουμε για ένα επίπεδο πρόβλημα είναι 3*).
- **Το $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ είναι συμβατό αν και μόνο αν $\mathbf{rank}(\mathbf{A}) = \mathbf{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{B}])$**, όπου $[\mathrm{A}|\mathrm{B}]$ ο επαυξημένος πίνακας. Αλλιώς λέμε ότι είναι **ασύμβατο.** (*μηχανισμός*)
- Αν $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = \mathrm{rank}([\mathrm{A}|\mathrm{B}]) = \mathrm{n}$, **τότε το $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ έχει ακριβώς μία λύση.** (*ισοστατικός φορέας στο επίπεδο με $rank(A)$=3, n=3*)
- Αν $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = \mathrm{rank}([\mathrm{A}|\mathrm{B}]) < \mathrm{n}$, **τότε το $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ έχει άπειρες λύσεις. Η γενική λύση του $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ εκφράζεται με $\mathbf{n} - \mathbf{rank}(\mathbf{A})$ παραμέτρους.** (*υπερστατικός φορέας για $rank(A)$=3, n>3. Ο βαθμός στατικής αοριστίας είναι* $\mathrm{n} - \mathrm{rank}(\mathrm{A})$)

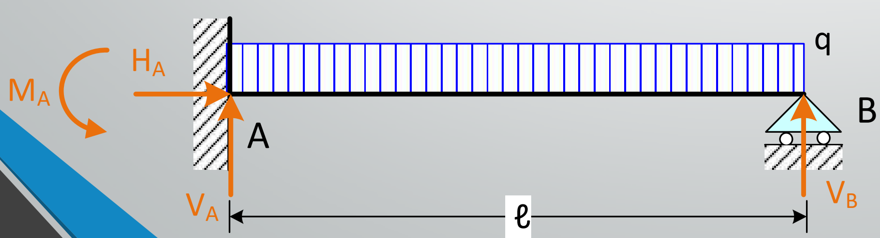
Στατική αοριστία (εξωτερική)

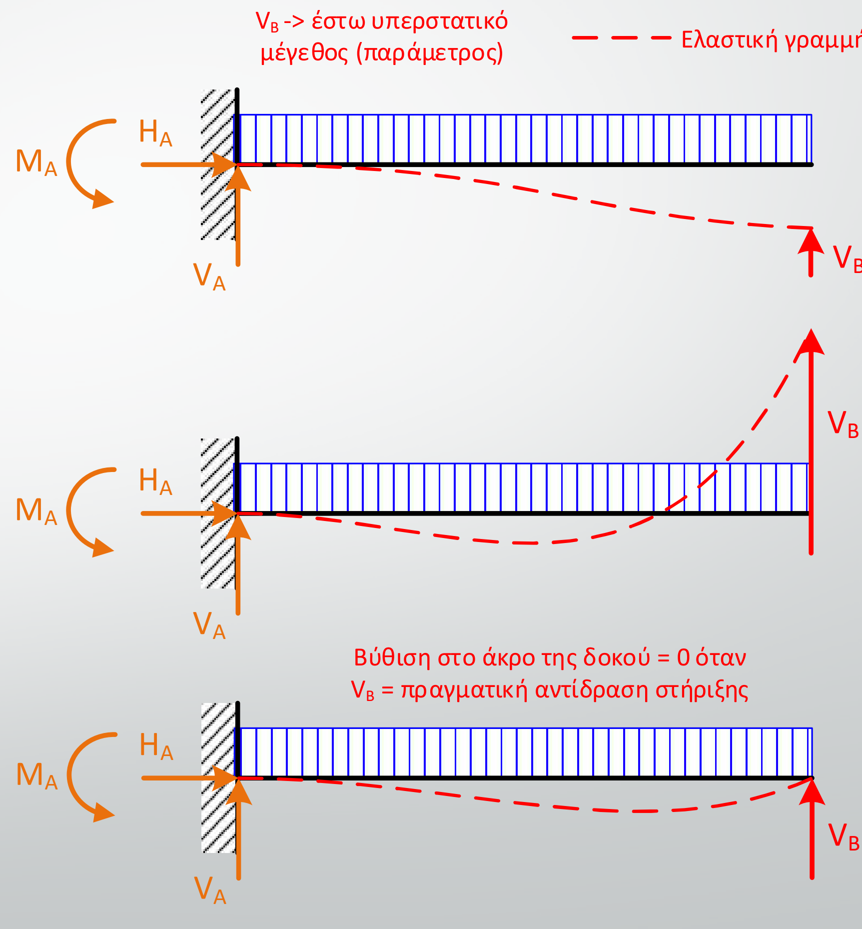
Δ.Ε. ελαστικής γραμμής:

$$\mathrm{EI}_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_z(x)$$

- *Πώς υπολογίζονται οι αντιδράσεις σε εξωτερικά υπερστατικό φορέα;*

Όταν ο φορέας είναι εξωτερικά υπερστατικός, για να υπολογισθούν οι αντιδράσεις **απαιτούνται επιπλέον εξισώσεις** που προκύπτουν από το συμβιβαστό των παραμορφώσεων (Μηχανική του Παραμορφώσιμου Σώματος). Αυτό ξεφεύγει από τις ανάγκες του μαθήματος, όμως μπορούμε να δούμε ποιοτικά πώς δουλεύει:

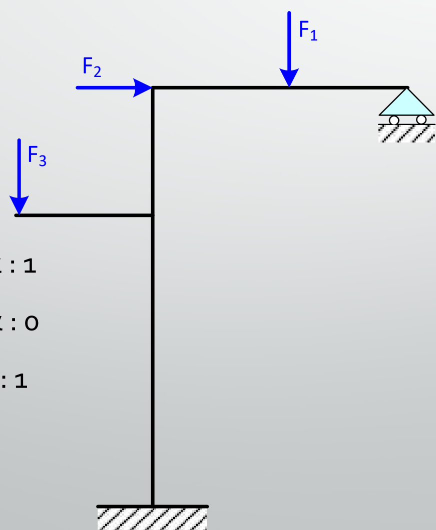




Στατική αοριστία (εξωτερική)

- *Τι εννοούμε με τον όρο **εξωτερική** στατική αοριστία;*

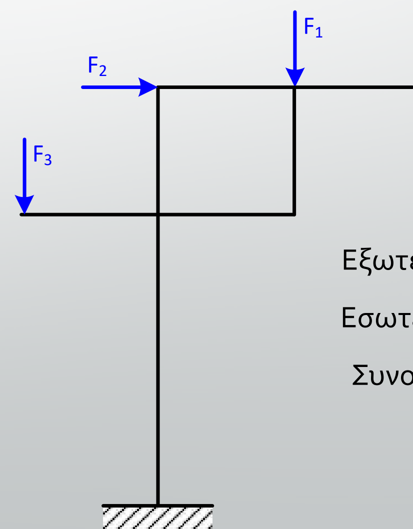
Ο όρος **εξωτερική** σημαίνει ότι **η αοριστία αφορά τον τρόπο στήριξης** του φορέα. **Όμως στατική αοριστία μπορεί να έχει και εσωτερικά ο φορέας!** Στα παραδείγματα που είδαμε, ο φορέας ήταν μια απλή δοκός (ισοστατικός φορέας), οπότε οι στερεοστατικές εξισώσεις αρκούν για να υπολογιστεί η εντατική κατάσταση σε τυχούσα τομή. Αποδεικνύεται ότι **αν ο φορέας έχει δενδροειδή μορφή (χωρίς κλειστούς βρόγχους), τότε είναι εσωτερικά ισοστατικός**. Για κάθε βρόγχο που «κόβουμε» μέχρι να γίνει δενδροειδής, αυξάνουμε την εσωτερική στατική αοριστία κατά 3.



Εξωτερική στατική αοριστία : 1

Εσωτερική στατική αοριστία : 0

Συνολική στατική αοριστία : 1



Εξωτερική στατική αοριστία : 0

Εσωτερική στατική αοριστία : 3

Συνολική στατική αοριστία : 3