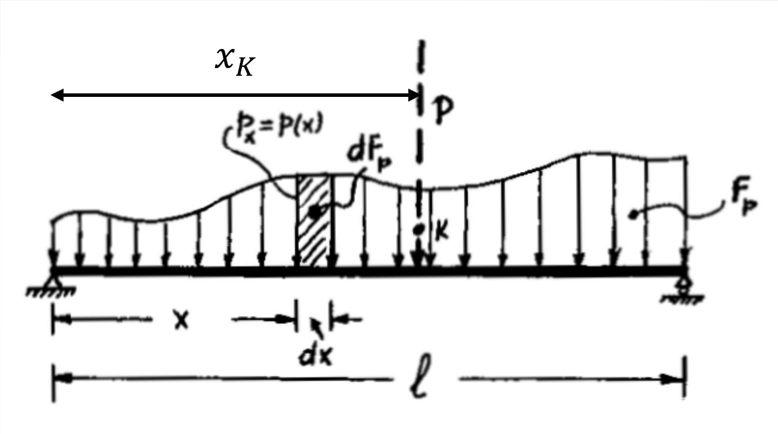
Κέντρα βάρους

Κέντρα βάρους

Είδαμε στην περίπτωση των κατανεμημένων φορτίων ότι η συνισταμένη δύναμη ισούται αριθμητικά με το εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη:

$$P = \int_0^l p(x)dx$$



Τυχαία κατανεμημένο φορτίο

Η θέση $\boldsymbol{x_K}$ του κέντρου βάρους Κ της επιφανείας, **από το οποίο διέρχεται ο φορέας της $\boldsymbol{P}$**, υπολογίζεται αν θεωρήσουμε ότι η ροπή της P ως προς την αρχή του άξονα x, θα πρέπει να ισούται αθροιστικά με την ροπή των στοιχειωδών λωρίδων ως προς το ίδιο σημείο:

$$P\, x_K = \int_0^l p(x)xdx \text{ δηλαδή}$$

$$\boldsymbol{x_K = \int_0^l p(x)xdx / \int_0^l p(x)dx = \text{Στατικη ροπη/εμβαδον}}$$

Κέντρα βάρους

Στην γενικότερη περίπτωση, ας θεωρήσουμε μια διsδιάστατη επιφάνεια στο επίπεδο yz.

Τότε το **εμβαδόν** της επιφάνειας θα δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

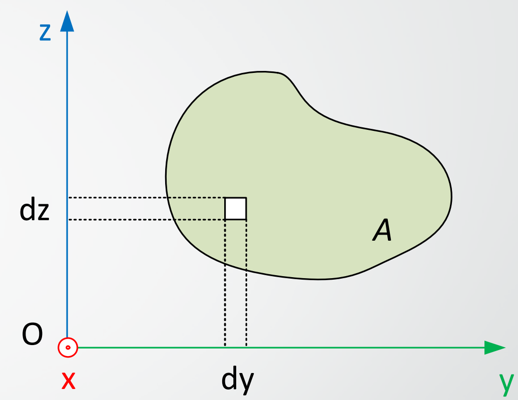
$$A = \int dA\,,\ dA = dydz$$

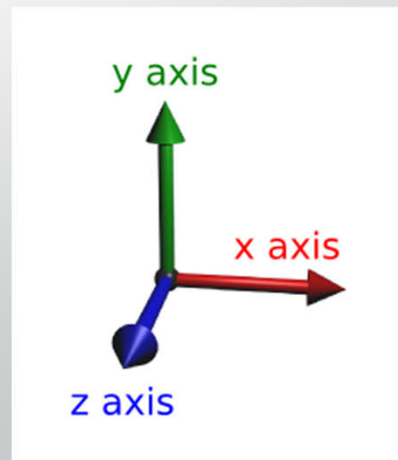
Το εμβαδόν είναι πάντα θετικό και ανεξάρτητο του $\boldsymbol{Oyz}$.

Η **στατική ροπή** ορίζεται σε σχέση με κάποιον **άξονα**. Αναφερόμενοι στους άξονες y, z, θα ορίζεται ως εξής:

$$S_y = \int zdA, S_z = \int ydA.$$

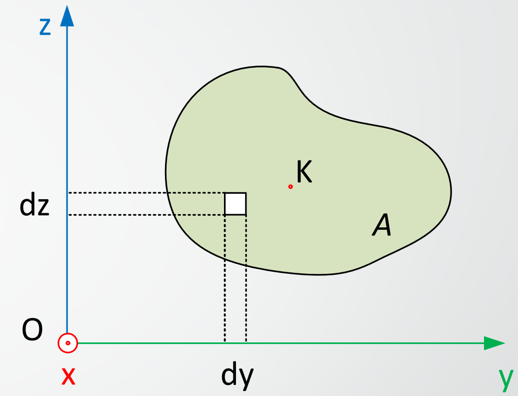
Η στατική ροπή μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Ειδικότερα είναι **ίση με το μηδέν όταν ο άξονας που μελετάμε χωρίζει την επιφάνεια σε δύο περιοχές που «ισορροπούν» εκατέρωθεν ως προς τον άξονα**. Προσοχή, οι δύο περιοχές δεν έχουν κατ’ ανάγκη ίσο εμβαδό.





Κέντρα βάρους

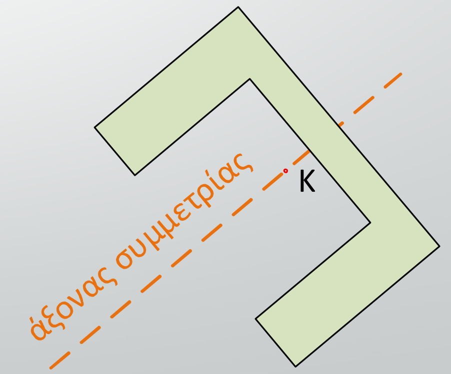
Μπορούμε να πούμε ότι **η στατική ροπή ως προς κάποιον άξονα είναι ίση με το μηδέν όταν ο άξονας διέρχεται από το κέντρο βάρους Κ της επιφάνειας**, το σημείο δηλαδή στο οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε συγκεντρωμένη όλη την επιφάνεια. Ήτοι, θα μπορούσαμε να ισορροπήσουμε ολόκληρη την επιφάνεια στηρίζοντας την μόνο στο σημείο αυτό.



Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους θα είναι:

$$y_K = \frac{S_z}{A} = \frac{\int y dA}{\int dA}, z_K = \frac{S_y}{A} = \frac{\int z dA}{\int dA},$$

Αν η επιφάνεια έχει κάποιον άξονα συμμετρίας, τότε αυτός αναγκαστικά θα διέρχεται από το κέντρο βάρους της. Αν έχει δύο άξονες συμμετρίας, τότε το κέντρο βάρους θα συμπίπτει με το σημείο τομής τους.



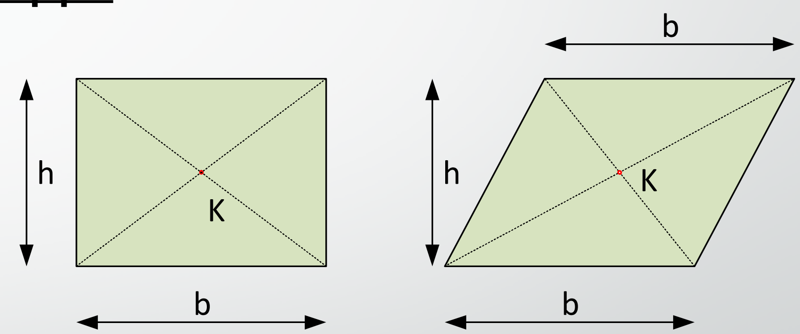
Κέντρα βάρους

Δεν απαιτείται να υπολογίζουμε ολοκληρώματα κάθε φορά. Μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν και το κέντρο βάρους κάποιων συνήθων σχημάτων με ολοκληρώματα και να τα χρησιμοποιήσουμε για να αναλύουμε πιο σύνθετα σχήματα.

Ορθογώνιο πλάτους b, ύψους h ή παραλληλόγραμμο με βάση b και ύψος h :

Εμβαδόν $b \times h$.

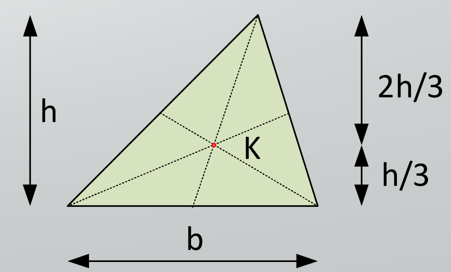
Κέντρο βάρους στο σημείο τομής των διαγώνιων.



Τρίγωνο με βάση b, ύψος h:

Εμβαδόν $(b \times h)/2$.

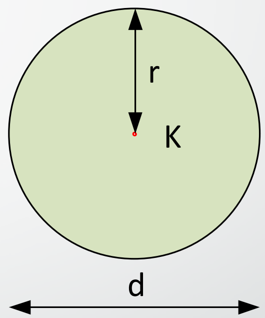
Κέντρο βάρους στο σημείο τομής των διαμέσων. Το σημείο αυτό απέχει $h/3$ από την βάση, $2h/3$ από την κορυφή.



Κέντρα βάρους

Δεν απαιτείται να υπολογίζουμε ολοκληρώματα κάθε φορά. Μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν και το κέντρο βάρους κάποιων συνήθων σχημάτων με ολοκληρώματα και να τα χρησιμοποιήσουμε για να αναλύουμε πιο σύνθετα σχήματα.

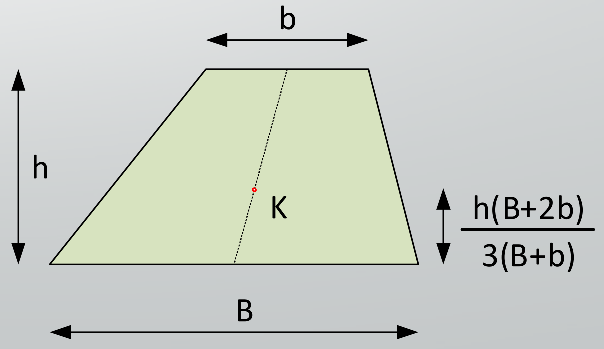
Κύκλος ακτίνας r, ή διαμέτρου d:



Εμβαδόν $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$.

Κέντρο βάρους στο γεωμετρικό κέντρο του κύκλου.

Τραπέζιο με μεγάλη βάση B, μικρή βάση b, ύψος h:



Εμβαδόν $(B+b)h/2$.

Κέντρο βάρους στο σημείο της διαμέσου που ενώνει τις παράλληλες πλευρές και απέχει $h(B+2b)/3(B+b)$ από την μεγάλη βάση B.