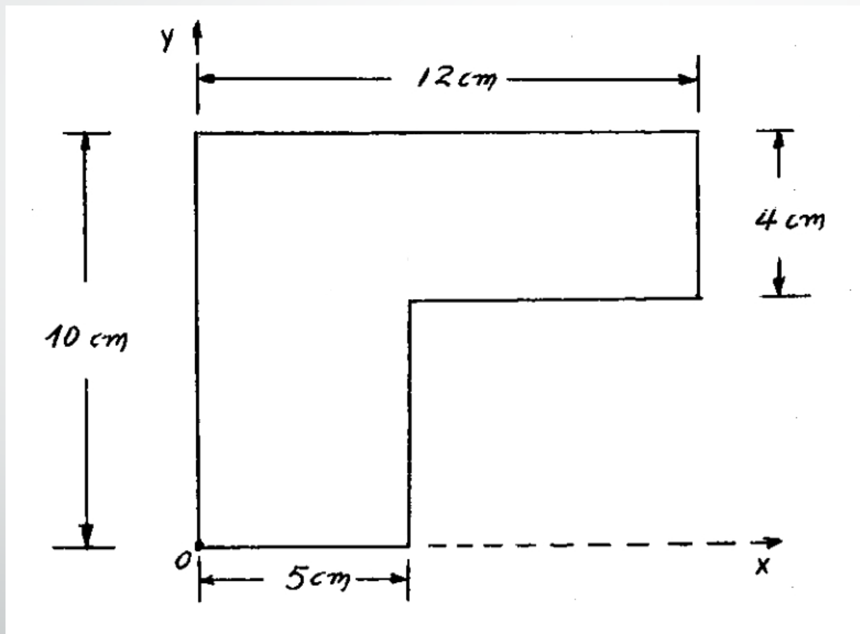
Ασκήσεις

Κέντρα βάρους

Άσκηση 1

- *Να προσδιοριστεί η θέση του κέντρου βάρους της επίπεδης ομογενούς πλάκας του σχήματος θεωρούμενης ότι έχει σταθερό και μικρό πάχος t.*



Άσκηση 1

Χωρίζω την επιφάνεια σε δύο ορθογώνια:

Ορθογώνιο 1: $A_1 = 5 \times 10 = 50cm^2$,

$x_{K1} = 2.5cm$, $y_{K1} = 5cm$.

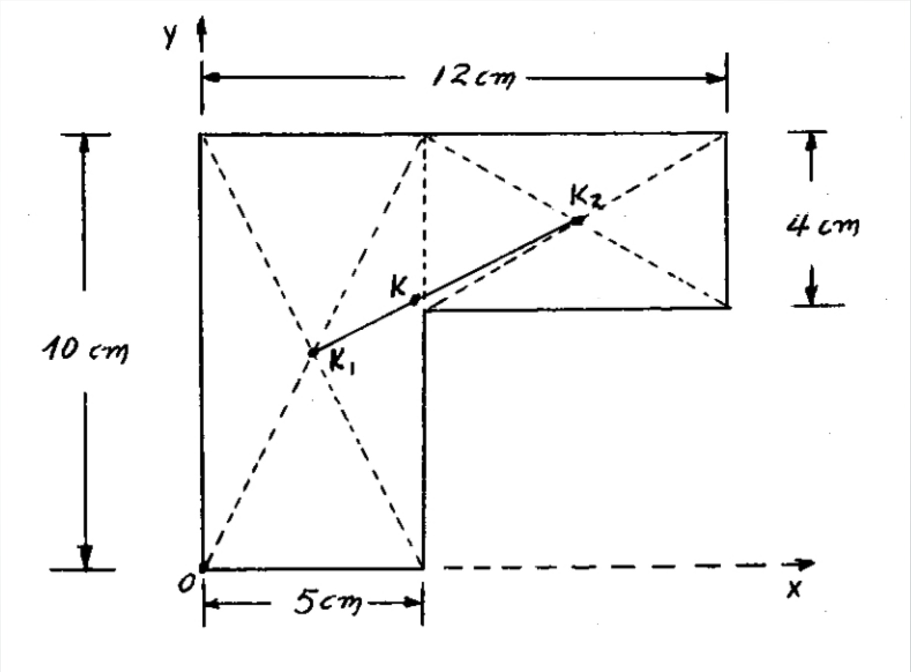
Ορθογώνιο 2: $A_2 = 7 \times 4 = 28cm^2$,

$x_{K2} = 8.5cm$, $y_{K2} = 8cm$.

Συνολικό εμβαδό $A = A_1 + A_2 = 78cm^2$.

$$x_K = \frac{\sum x_{Ki}A_i}{\sum A_i} = \frac{x_{K1}A_1 + x_{K2}A_2}{A_1 + A_2}$$
$$= \frac{50 \times 2.5 + 28 \times 8.5}{50 + 28} \cong 4.65cm,$$

$$y_K = \frac{\sum y_{Ki}A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{K1}A_1 + y_{K2}A_2}{A_1 + A_2}$$
$$= \frac{50 \times 5 + 28 \times 8}{50 + 28} \cong 6.08cm$$

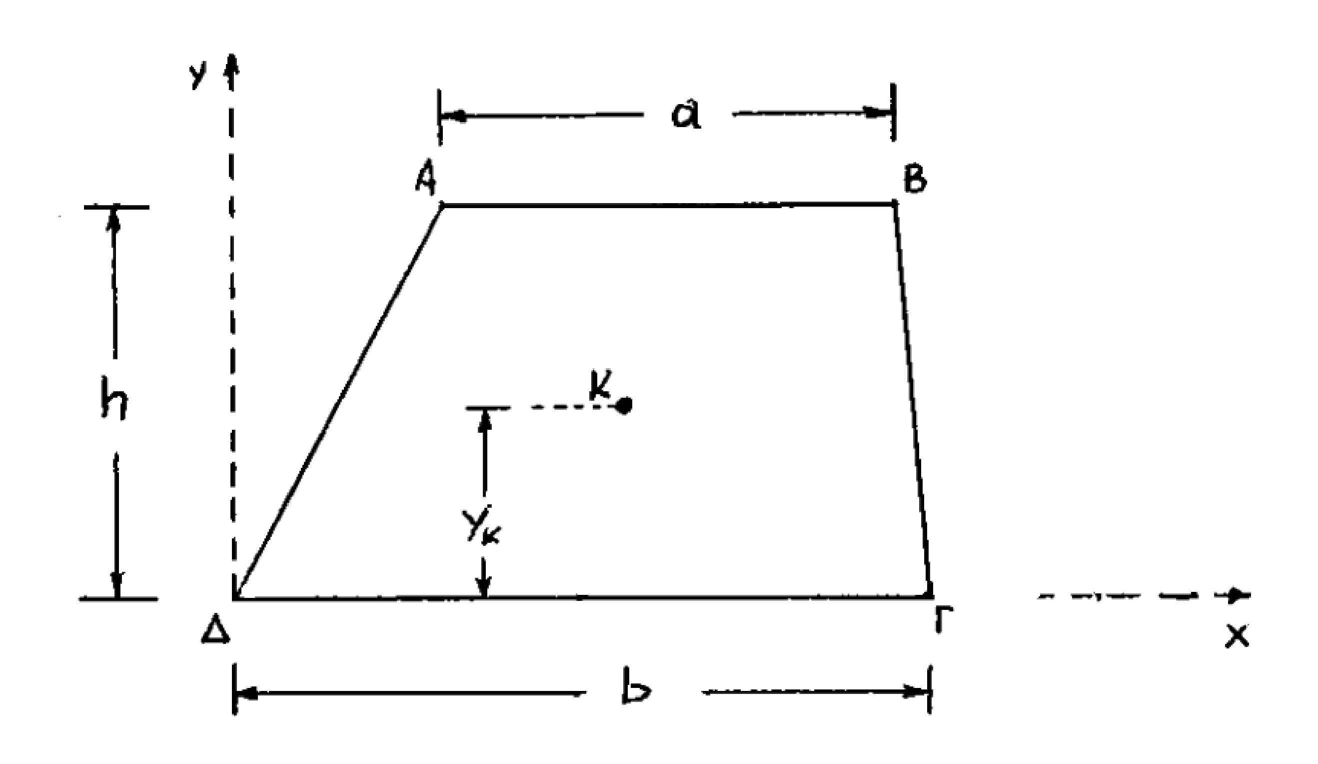


Το Κ ανήκει στην ευθεία που ενώνει τα Κ1, Κ2.

Θα μπορούσα να πάρω ένα μεγάλο ορθογώνιο 12×10 και να αφαιρέσω το ορθογώνιο 7×6 κάτω δεξιά.

Άσκηση 2

- *Να προσδιοριστεί η απόσταση y_K του κέντρου βάρους του τραπεζίου του σχήματος από την κάτω βάση με χρήση απλούστερων σχημάτων.*



Άσκηση 2

Θεωρώ το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΔ (1) και το τρίγωνο ΒΕΓ (2):

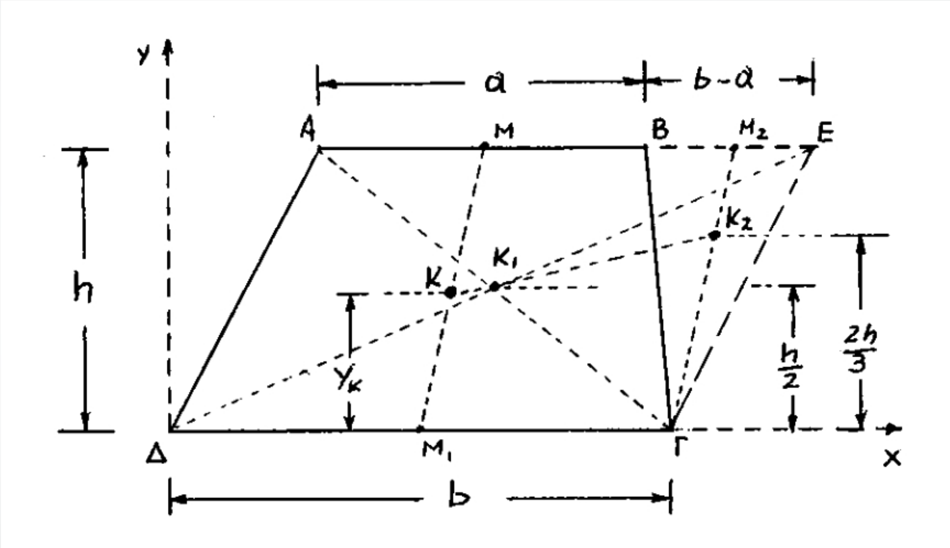
$A_1 = bh,\ y_{K1} = \frac{h}{2}.$

$A_2 = \frac{(b-a)h}{2},\ y_{K2} = \frac{2h}{3}.$

$$y_K = \frac{\sum y_{Ki} A_i}{\sum A_i} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right) bh - \left(\frac{2h}{3}\right)\frac{(b-a)h}{2}}{bh - \frac{(b-a)h}{2}}$$

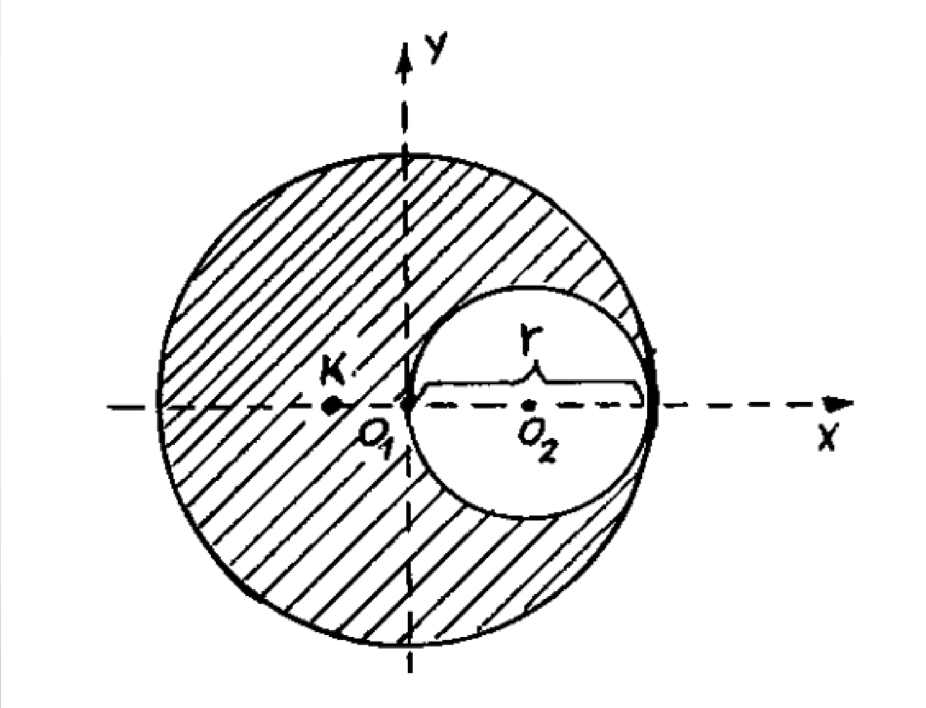
$$= \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

Το Κ ανήκει στην ευθεία που ενώνει τα Κ1, Κ2.



Άσκηση 3

- *Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.*



Άσκηση 3

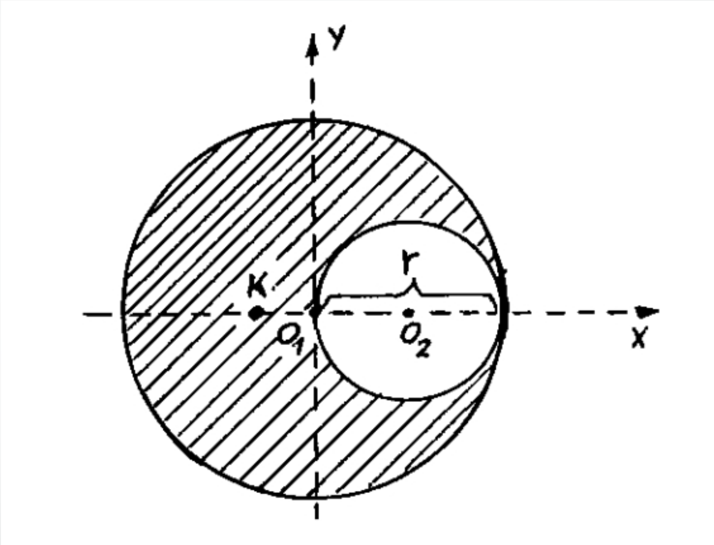
Η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει άξονα συμμετρίας τον x, άρα $y_K = 0$.

Θεωρώ τους κυκλικούς δίσκους με κέντρο O_1 και ακτίνα r (1) και κέντρο O_2 και ακτίνα $\frac{r}{2}$ (2).

$A_1 = \pi r^2$, $x_{K1} = 0$.

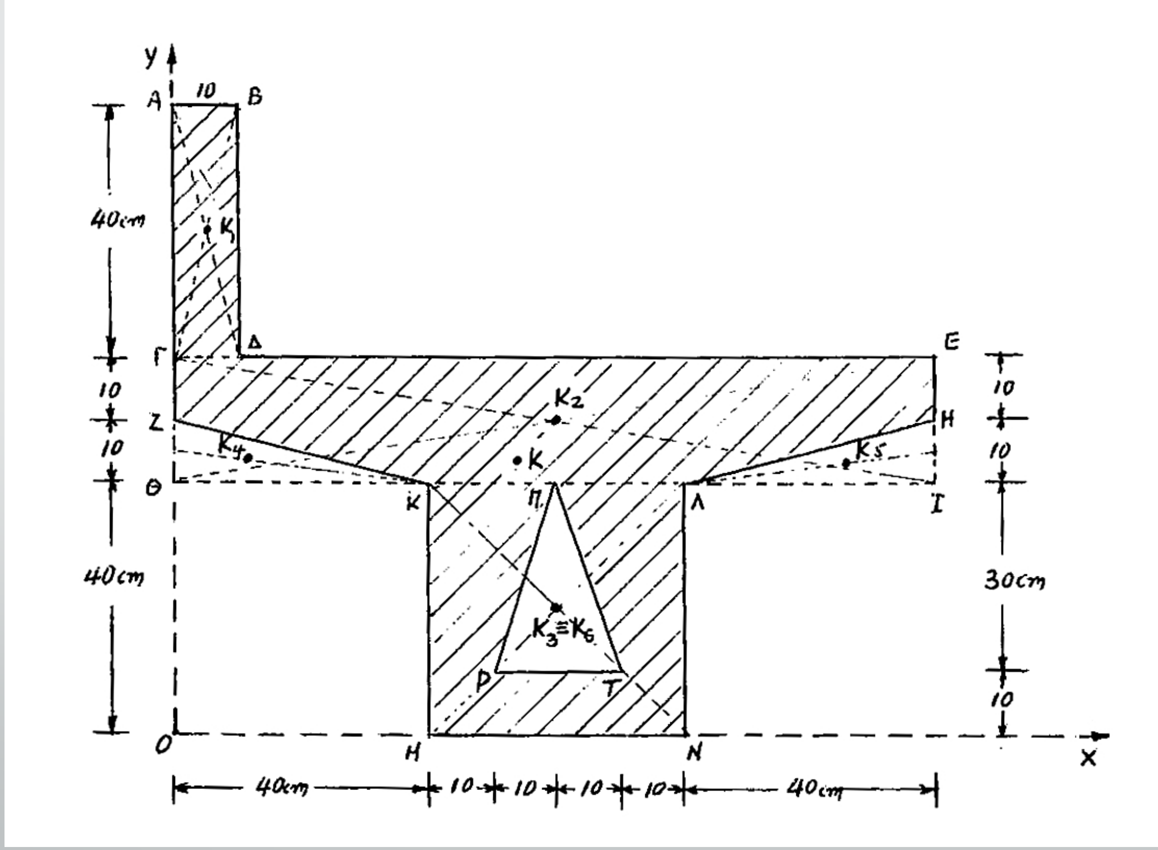
$A_2 = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$, $x_{K2} = \frac{r}{2}$.

$$x_K = \frac{\sum x_{Ki} A_i}{\sum A_i} = \frac{(0)\pi r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2 - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2} = -\frac{r}{6}$$

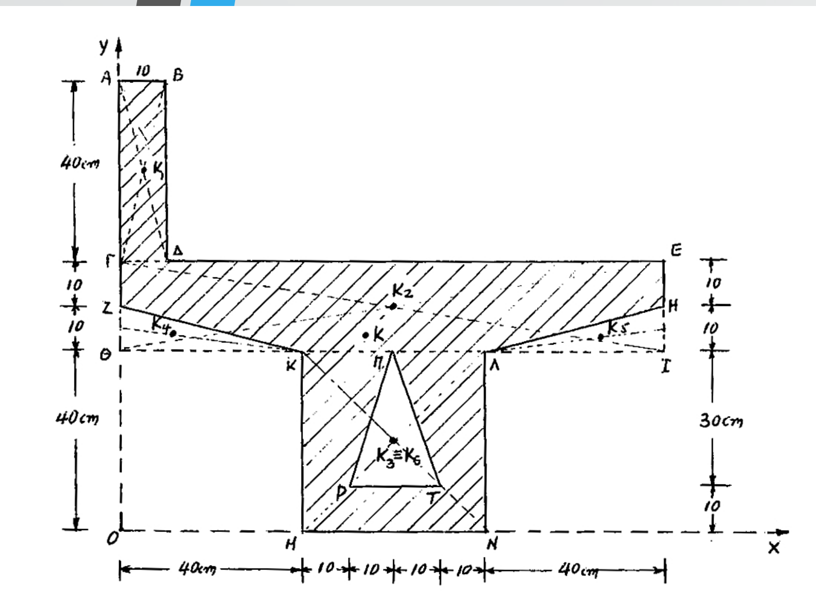


Άσκηση 4

- *Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.*



Άσκηση 4



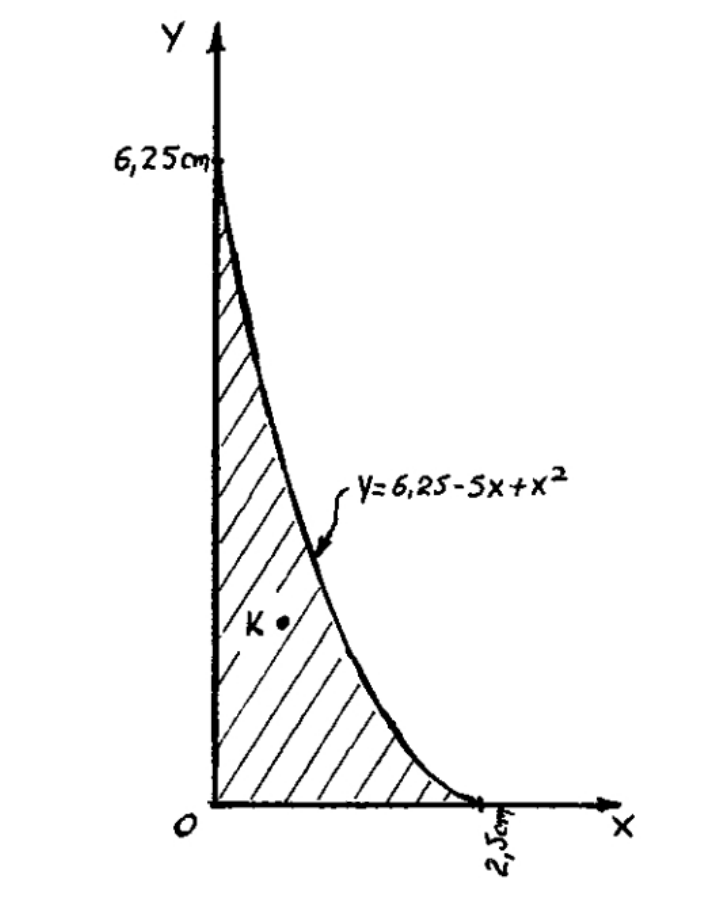
Τμήματα επιφάνειας	Εμβαδόν F_i (cm^2)	Συντεταγμένες K_i: χ_i (cm)	y_i (cm)	$F_i \cdot \chi_i$	$F_i y_i$
ορθογ. ΑΒΔΓ	400	5	80	2000	32000
// ΓΕΙΘ	2400	60	50	144000	120000
// ΚΛΝΜ	1600	60	20	96000	32000
τρίγ. ΖΘΚ	-200	13,33	43,33	-2666	-8666
// ΗΛΙ	-200	106,67	43,33	-21334	-8666
// ΠΡΤ	-300	60	20	-18000	-6000
	$\Sigma F_i = 3700$			$\Sigma F_I \cdot \chi_i =$ = 200000	$\Sigma F_i y_i =$ = 160668

Η γραμμοσκιασμένη περιοχή δεν έχει άξονα συμμετρίας. Μπορούμε να την χωρίσουμε σε απλούστερα σχήματα.

Τελικά $x_K = \frac{200000}{3700} = 54.05cm$, $y_K = \frac{160668}{3700} = 43.42cm$

Άσκηση 5

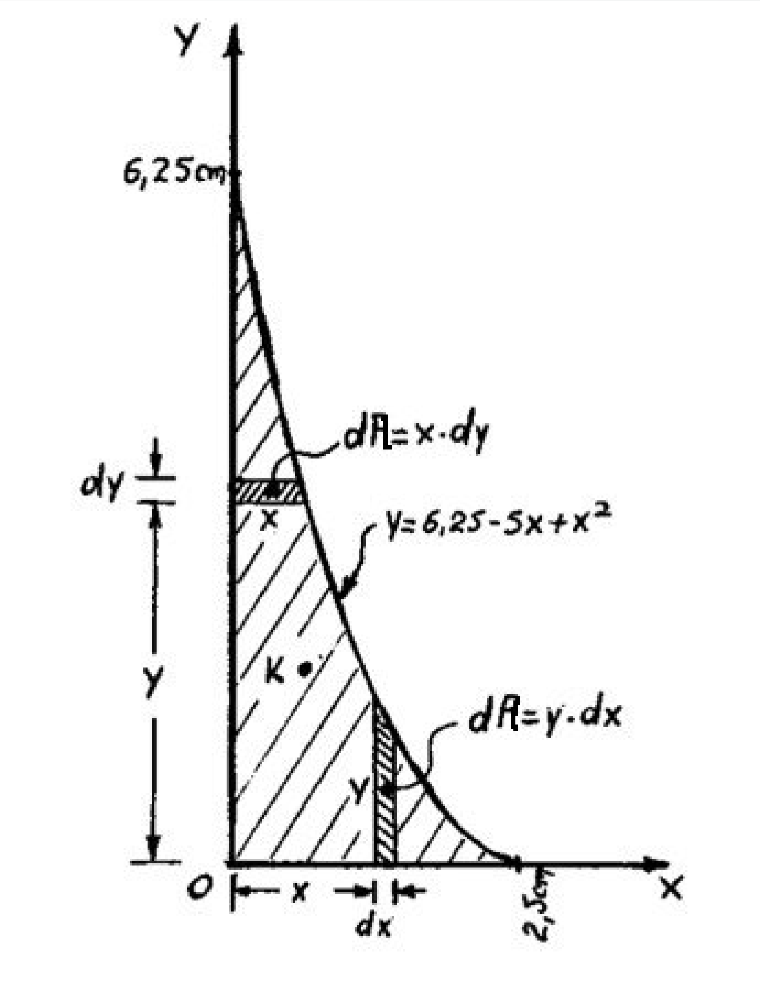
- *Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας, που σχηματίζεται από τους άξονες* x, y *και την παραβολή β′ βαθμού* $y = 6.25 - 5x + x^2$.



Άσκηση 5

- *Εμβαδόν:* $A = \int dA = \int_0^{2.5} y dx$
  $= \int_0^{2.5} (6.25 - 5x + x^2) dx$
  $= \left[6.25x - 2.5x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^{2.5} \cong 5.21 cm^2$

- $x_K = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int_0^{2.5} x(6.25 - 5x + x^2) dx}{A} =$
  $= \frac{\int_0^{2.5} (6.25x - 5x^2 + x^3) dx}{A} = \frac{\left[\frac{6.25x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^{2.5}}{A}$
  $\cong 0.62 cm$



Άσκηση 5

- *Λύνω ως προς x, για να βρω το πλάτος της στοιχειώδους επιφάνειας:*
- $6.25 - 5x + x^2 = y \Rightarrow$
  $x^2 - 5x + (6.25 - y) = 0$
- $x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (6.25 - y)}}{2 \times 1} = 2.5 \pm \sqrt{y}$
- *Η καμπύλη που μελετάμε αντιστοιχεί στο* $x = 2.5 - \sqrt{y}$
- $y_K = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int_0^{6.25} y(2.5 - \sqrt{y}) dy}{A} =$
  $= \frac{\int_0^{6.25} \left(2.5y - y^{\frac{3}{2}}\right) dy}{A} = \frac{\left[\frac{2.5y^2}{2} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}\right]_0^{6.25}}{A} \cong 1.87cm$