Ροπές αδρανείας

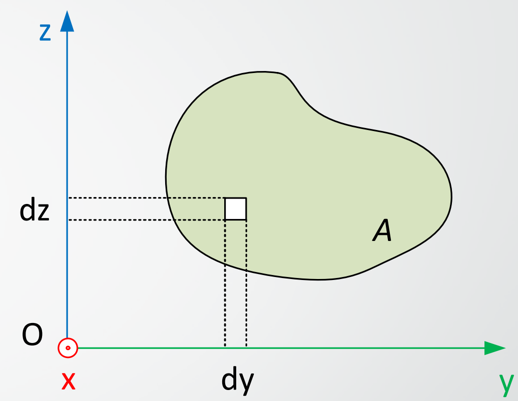
Ροπές αδρανείας

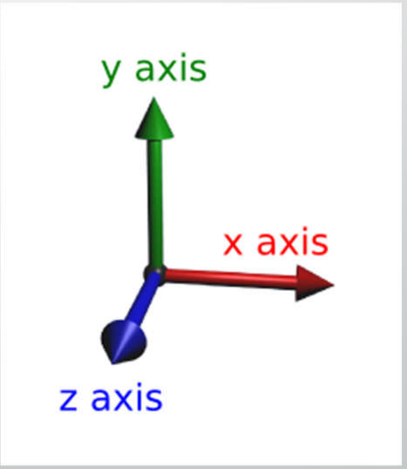
Οι **ροπές αδρανείας ή δευτεροβάθμιες ροπές** διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: Στις **μαζικές**, οι οποίες αναφέρονται σε υλικά σημεία, συστήματα σημείων ή στερεά σώματα με μάζα, και στις **γεωμετρικές** που αναφέρονται σε γεωμετρικά σχήματα.

Η πρώτη κατηγορία αφορά κυρίως στην **Δυναμική**, αφού αναφέρεται στην αντίσταση λόγω αδράνειας που παρουσιάζουν τα σώματα στην αλλαγή της κινητικής τους κατάστασης.

Η δεύτερη κατηγορία αφορά κυρίως στην **Στατική**. Η ροπή αδράνειας μιας επίπεδης επιφάνειας δίνει ένα μέτρο της δυσκολίας που παρουσιάζει η διατομή στην κάμψη (δυσκαμψία διατομής = $E\ I$).

Εμείς θα ασχοληθούμε με τις **<u>γεωμετρικές ροπές αδρανείας</u>**.





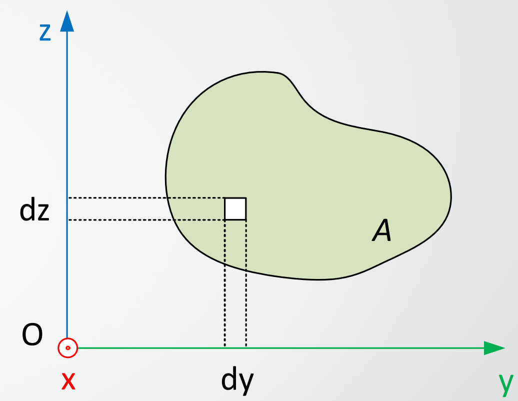
Ροπές αδρανείας

Αναφερόμενοι στους άξονες y, z, οι γεωμετρικές **ροπές αδρανείας** δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_y = \int z^2 dA, I_z = \int y^2 dA.$$

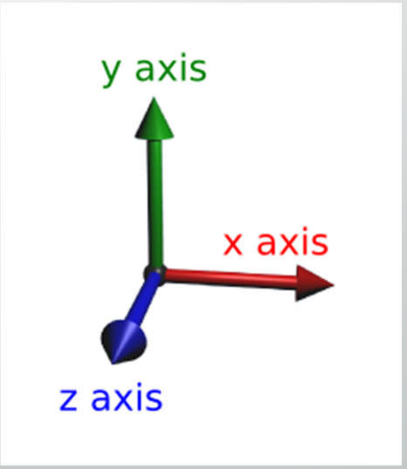
Υπάρχει επίσης το **γινόμενο αδρανείας**:

$$I_{yz} = I_{zy} = \int yzdA$$



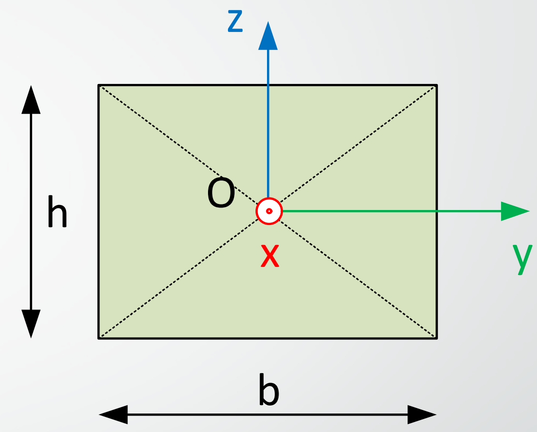
Οι I_y, I_z είναι μη μηδενικοί θετικοί αριθμοί. Το γινόμενο αδρανείας όμως μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός αριθμός ή και μηδέν.

Όταν $I_{yz} = 0$ τότε το σύστημα των αξόνων Oyz θα λέγεται **κύριο**. Αν επιπλέον το O συμπίπτει με το κέντρο βάρους της διατομής, το Oyz θα λέγεται **κύριο κεντροβαρικό σύστημα.**



Ροπές αδρανείας

<u>**Παράδειγμα**</u>: να υπολογιστούν οι ροπές αδρανείας ενός ορθογωνίου πλάτους b και ύψους h, στο κεντροβαρικό σύστημα Oyz όπου οι άξονες y, z είναι παράλληλοι ή κάθετοι στις πλευρές, όπως στο σχήμα.



$$I_y = \int z^2\, dA = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2\, dydz = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{h^3}{12} dy = \frac{\boldsymbol{bh^3}}{\boldsymbol{12}}$$

$$I_z = \int y^2\, dA = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2\, dydz = \int_{-b/2}^{b/2} z\, y^2 dy = \frac{\boldsymbol{hb^3}}{\boldsymbol{12}}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int yz\, dA = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} yz\, dydz = 0$$

Άρα το σύστημα Oyz δεν είναι απλά κεντροβαρικό, αλλά **κύριο κεντροβαρικό** για το ορθογώνιο του σχήματος.

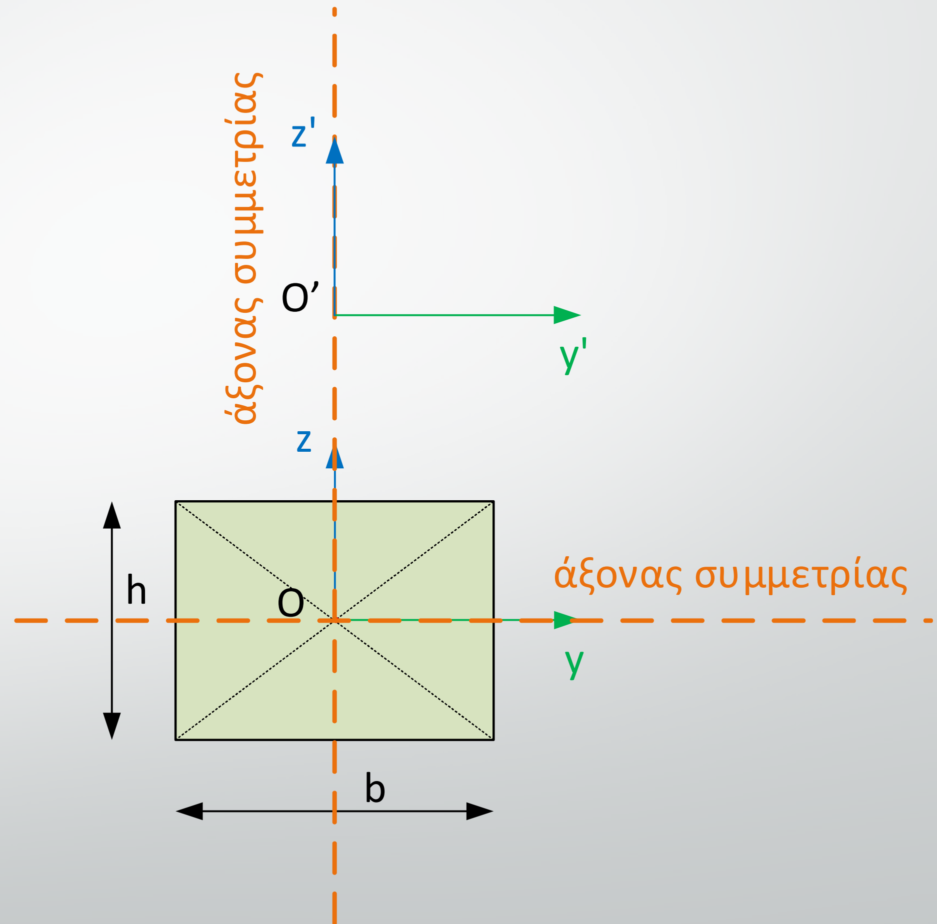
Ροπές αδρανείας

Γενικά, **αν έστω και ένας από τους άξονες είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος, τότε το γινόμενο αδρανείας είναι μηδέν και το σύστημα συντεταγμένων είναι κύριο**.

Στο διπλανό σχήμα, το Oyz είναι κύριο κεντροβαρικό, το $O'y'z'$ απλά κύριο σύστημα.

Ισχύει: $I_{yz} = \int yz\, dA = 0$,

Αλλά και $I_{y'z'} = 0$.

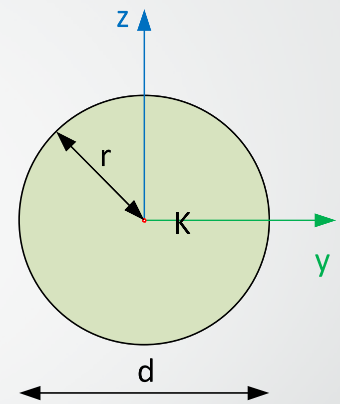


Ροπές αδρανείας

<u>**Κύκλος ακτίνας r, ή διαμέτρου d**</u>:

Ροπή αδρανείας: $\boldsymbol{I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}}$.

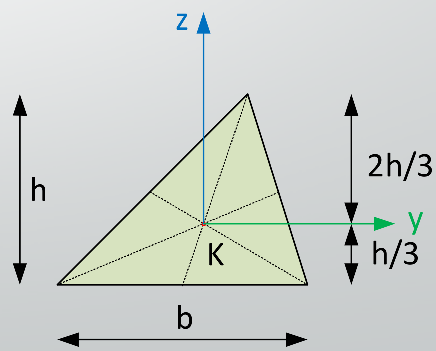
Το σύστημα Kyz του σχήματος είναι κύριο κεντροβαρικό.



<u>**Τρίγωνο με βάση b, ύψος h**</u>:

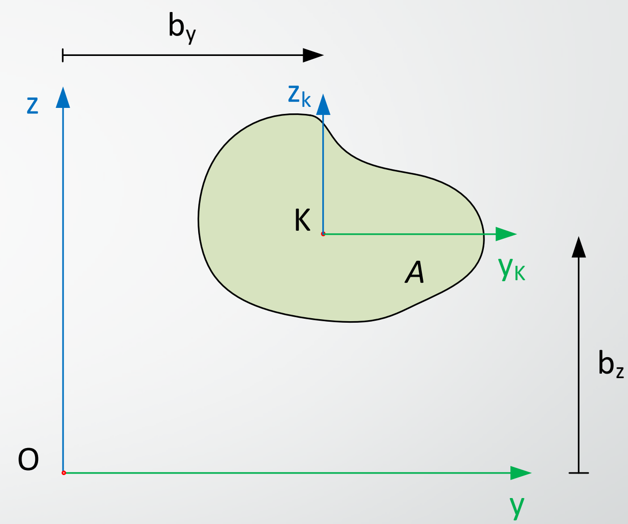
Κέντρο βάρους στο σημείο τομής των διαμέσων. Το σημείο αυτό απέχει $h/3$ από την βάση, $2h/3$ από την κορυφή.

Ροπή αδρανείας: $\boldsymbol{I_y = \frac{bh^3}{36}}$, όπου ο άξονας y διέρχεται από το κέντρο βάρους και είναι παράλληλος στην βάση. Άρα το σύστημα Kyz του σχήματος είναι κεντροβαρικό.



Ροπές αδρανείας

Έστω η επιφάνεια A και το κεντροβαρικό σύστημα συντεταγμένων Ky_kz_k, όπως στο σχήμα:



Τότε, σύμφωνα με το **θεώρημα Steiner** ή **το θεώρημα παράλληλης μεταφοράς αξόνων**, θα ισχύει

$$I_y = I_{y_k} + Ab_z^2$$

$$I_z = I_{z_k} + Ab_y^2$$

$$I_{yz} = I_{y_k z_k} + Ab_y b_z$$

Όπου b_y, b_z οι **προσημασμένες** αποστάσεις παράλληλης μεταφοράς των αξόνων, όπως στο σχήμα.

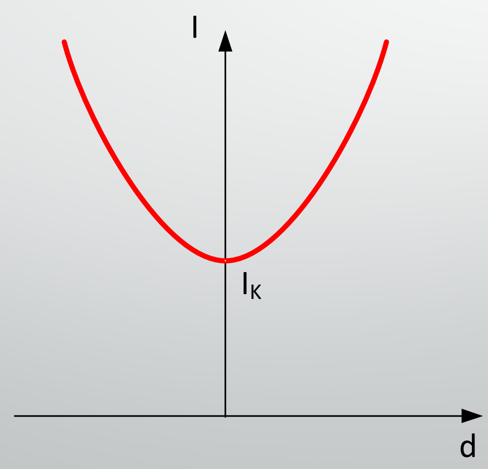
Η προσήμανση έχει σημασία μόνο για το γινόμενο αδρανείας.

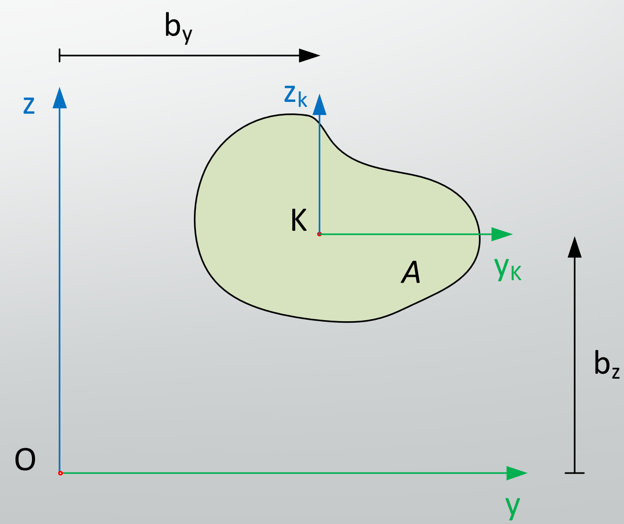
Ροπές αδρανείας

Γενικά, για την μεταφορά των ροπών αδρανείας μεταξύ παράλληλων αξόνων, θα ισχύει (θ. Steiner): $\boldsymbol{I = I_K + Ad^2}$,

όπου, I η ροπή αδράνειας στο νέο σύστημα, I_K η ροπή αδρανείας στο κεντροβαρικό σύστημα, A η επιφάνεια και d η απόσταση μεταξύ των παράλληλων αξόνων (εδώ δεν μας νοιάζει η φορά).

Η ροπή αδράνειας I ακολουθεί την παρακάτω γραφική παράσταση:



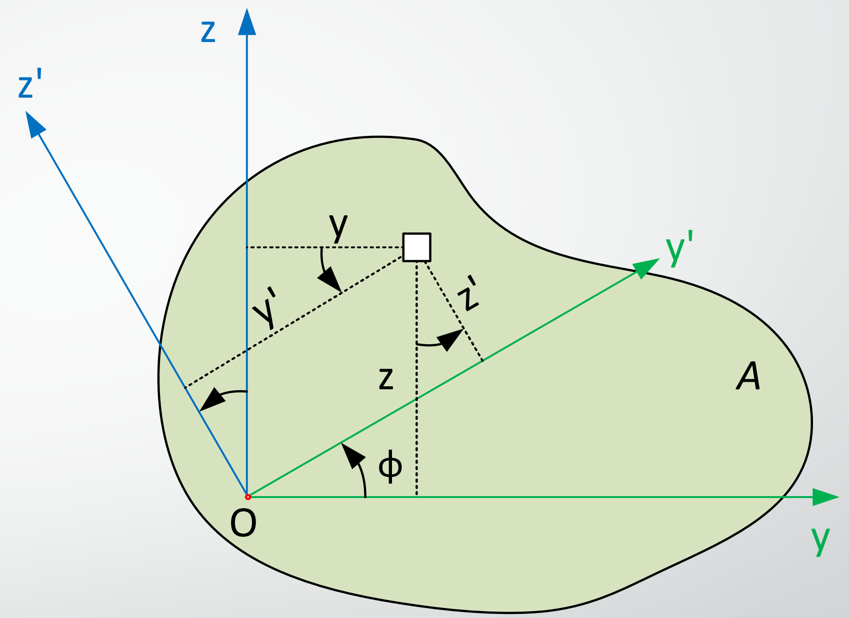


Ροπές αδρανείας

Εκτός από την παράλληλη μεταφορά, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές αδρανείας και το γινόμενο αδρανείας **σε σύστημα συντεταγμένων στραμμένο κατά κάποια γωνία ως προς το αρχικό**.

$$y' = y\cos\varphi + z\sin\varphi$$

$$z' = z\cos\varphi - y\sin\varphi$$



Οπότε:

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos2\varphi - I_{yz}\sin2\varphi$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos2\varphi + I_{yz}\sin2\varphi$$

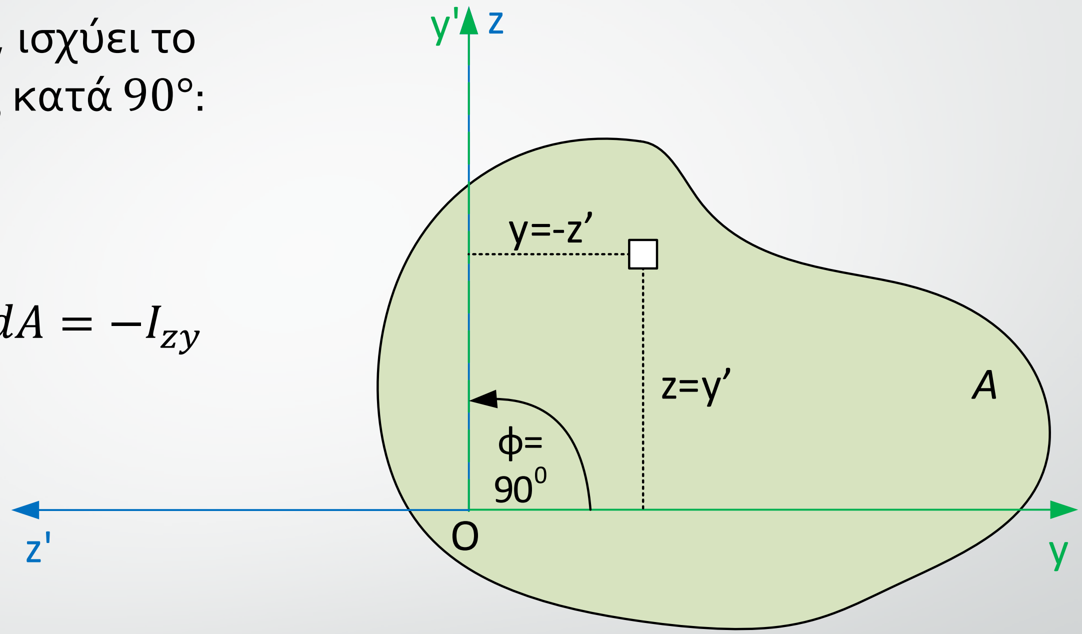
$$I_{y'z'} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin2\varphi + I_{yz}\cos2\varphi$$

Ροπές αδρανείας

Ειδικά για το γινόμενο αδρανείας, ισχύει το εξής για στροφή του συστήματος κατά $90°$:
$y = -z', z = y$.

Οπότε:

$$I_{y'z'} = I_{z'y'} = \int y'z'dA = -\int yzdA = -I_{zy}$$



Επειδή η $I_{y'z'} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\varphi + I_{yz}\cos 2\varphi$ είναι μια συνεχής συνάρτηση της γωνίας φ, και επειδή η τιμή της αλλάζει πρόσημο μεταξύ $\varphi = 0°$ και $\varphi = 90°$, **θα υπάρχει μια ειδική γωνία, έστω φ_0, μεταξύ $0°$ και $90°$ για την οποία το γινόμενο αδρανείας μηδενίζεται**. Δηλαδή για στροφή κατά φ_0, το $Oy'z'$ είναι **κύριο** σύστημα αξόνων.

Ροπές αδρανείας

Θέτω $I_{y'z'} = 0$ και λύνω ως προς φ_0:

$$0 = \frac{I_y - I_z}{2}\sin(2\varphi_0) + I_{yz}\cos(2\varphi_0) \Rightarrow \tan(2\varphi_0) = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right)$$

Αντικαθιστώ να βρω τις **κύριες ροπές αδράνειας** (που πολλές φορές συμβολίζονται και με I_1, I_2 ή I_u, I_v, όπου Ouv το κύριο σύστημα αξόνων):

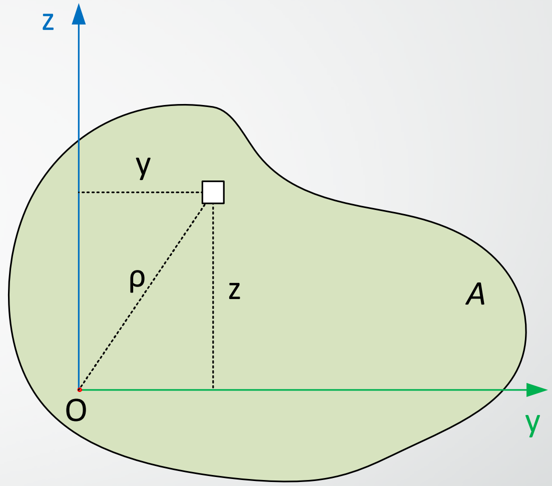
$$I_u = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\varphi_0 - I_{yz}\sin 2\varphi_0$$

$$I_v = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\varphi_0 + I_{yz}\sin 2\varphi_0$$

Αποδεικνύεται ότι **οι κύριες ροπές αδρανείας είναι ακρότατες τιμές της συνάρτησης $\boldsymbol{I_{y'}(\varphi)}$ και $\boldsymbol{I_{z'}(\varphi)}$**, διότι $\frac{dI_{y'}}{d\varphi} = \frac{dI_{z'}}{d\varphi} = 0$ όταν $I_{y'z'} = 0$.

Ροπές αδρανείας

Έστω ρ η απόσταση του στοιχειώδους εμβαδού από την αρχή των αξόνων.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα: $\rho^2 = y^2 + z^2$.

Τότε:

$$I_O = \int \rho^2 dA = \int z^2 dA + \int y^2 dA = I_y + I_z$$

όπου **I_O η πολική ροπή αδρανείας της διατομής.**

Ορίζω επίσης τις **ακτίνες αδρανείας**, με διαστάσεις μήκους, ως προς τους άξονες y και z:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$