

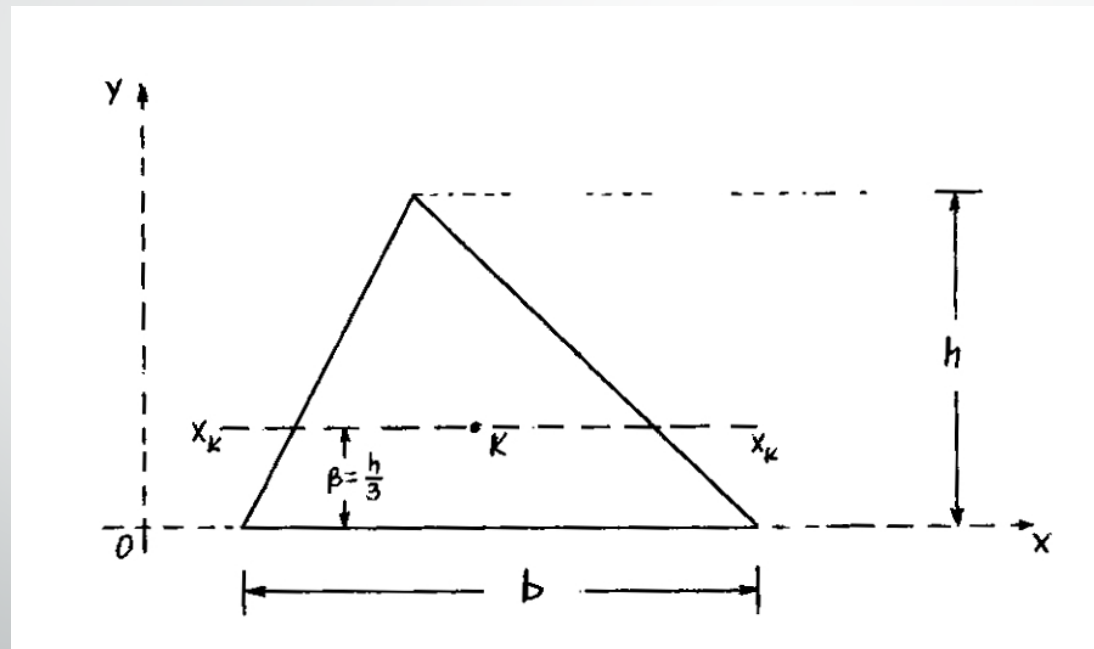


Ασκήσεις

Ροπές αδρανείας

Άσκηση 1

- Να προσδιοριστεί η ροπή αδρανείας τριγώνου βάσης b ύψους h ως προς άξονα που συμπίπτει με την βάση του.



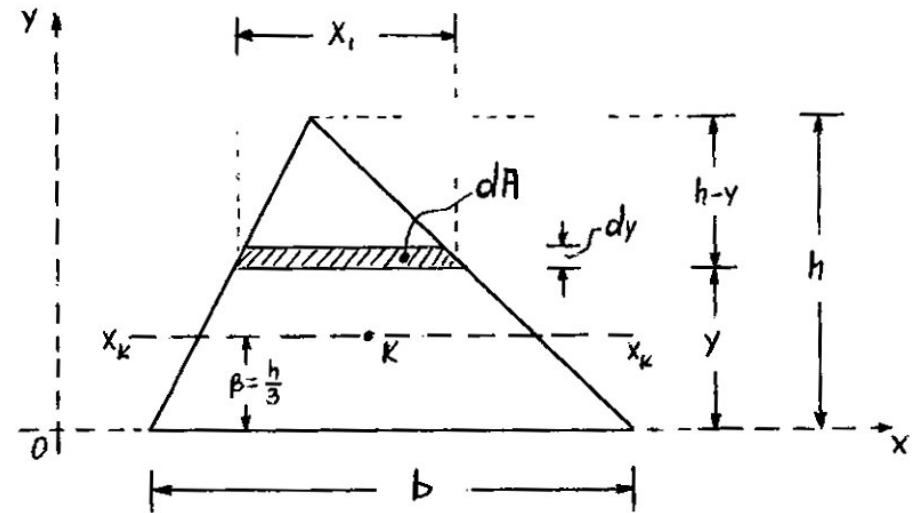
Άσκηση 1

- Από όμοια τρίγωνα: $\frac{x_1}{b} = \frac{h-y}{h}$

- $$I_x = \int y^2 dA$$
$$= \int_0^h y^2 x_1 dy$$
$$= \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy$$
$$= \frac{b}{h} \left[h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h$$
$$= \frac{b}{h} \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

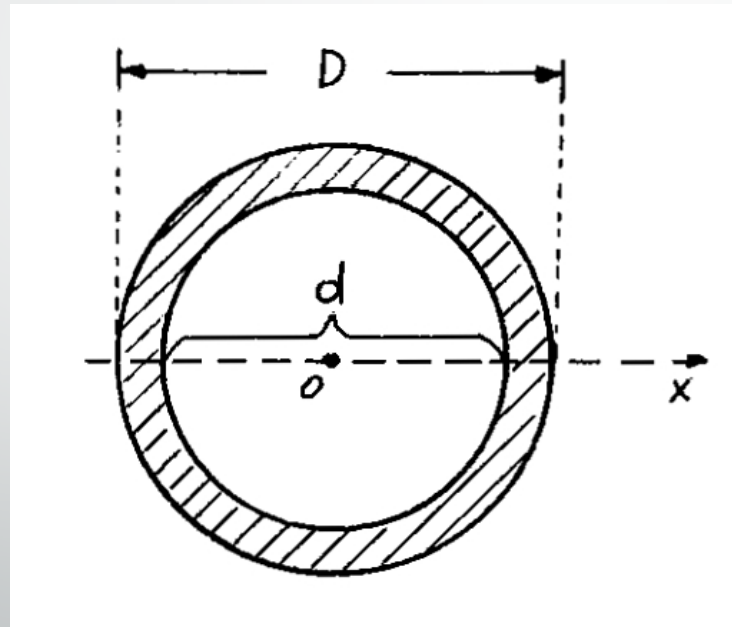
- Αλλιώς από Steiner:

$$I_x = I_{x_K} + Ad^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3} \right)^2$$
$$= \frac{bh^3}{12}$$



Άσκηση 2

- Να προσδιοριστεί η πολική ροπή αδρανείας κυκλικού δακτυλίου εξωτερικής διαμέτρου D , εσωτερικής διαμέτρου d , ως προς το γεωμετρικό του κέντρο.



Άσκηση 2

- Γνωρίζω για τον εξωτερικό κυκλικό

δίσκο: $I_{x.εξ} = \frac{\pi D^4}{64}$.

- Για τον εσωτερικό κυκλικό δίσκο:

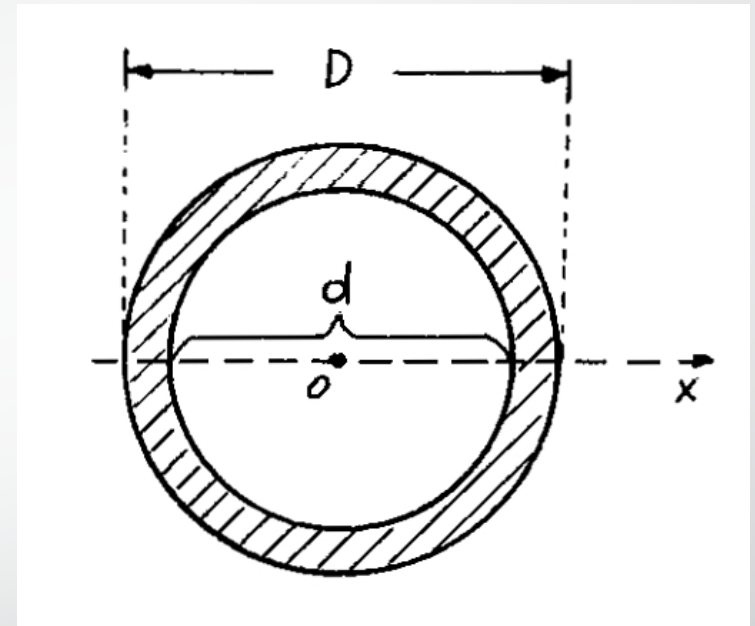
$$I_{x.εσ} = \frac{\pi d^4}{64}$$

- Άρα για τον δακτύλιο:

$$I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = I_y$$

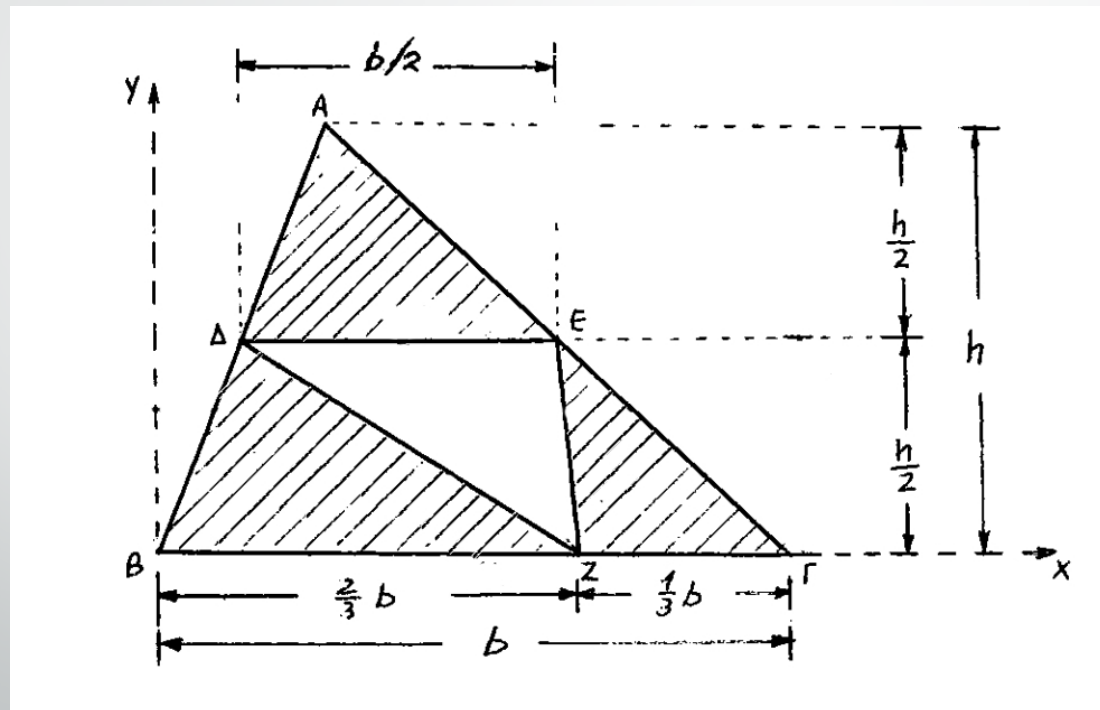
- Η πολική ροπή αδράνειας γύρω από το O :

$$I_O = I_x + I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$



Άσκηση 3

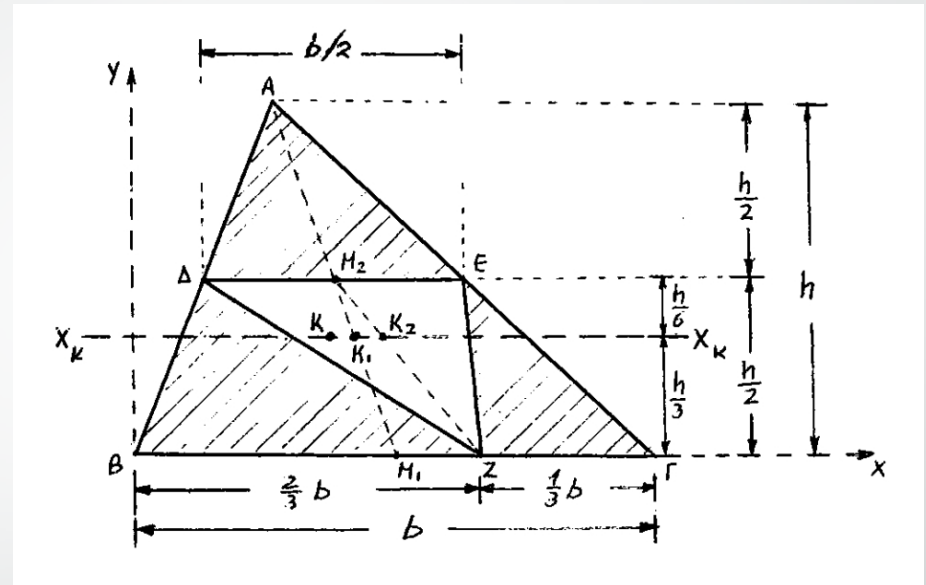
- Να βρεθεί η ροπή αδράνειας της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα που είναι παράλληλος με τον x .



Άσκηση 3

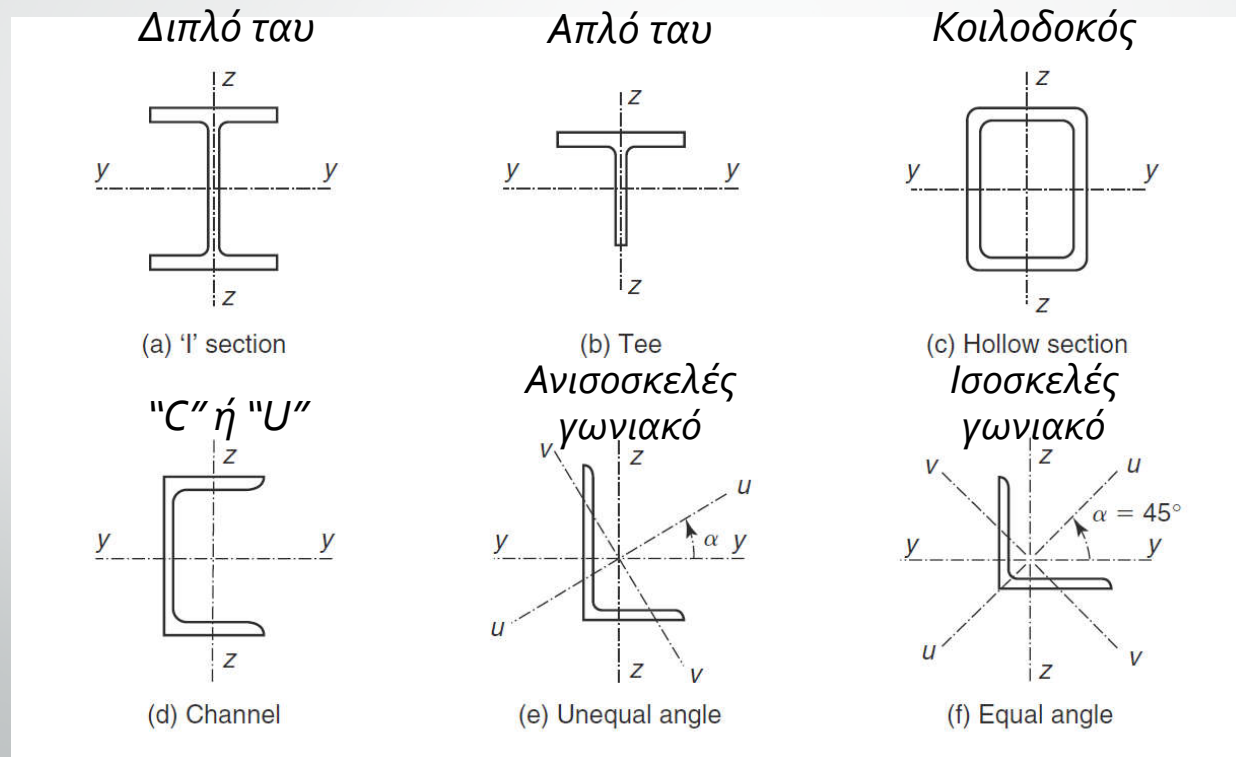
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν τα κέντρα βάρους τους στην ίδια στάθμη y , αφού η απόσταση του K_1 από τον x είναι $\frac{h}{3}$, ενώ του K_2 είναι $\frac{2}{3} \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{3}$. Άρα και το K θα είναι στην ίδια στάθμη.
- Για την διαγραμμισμένη επιφάνεια:

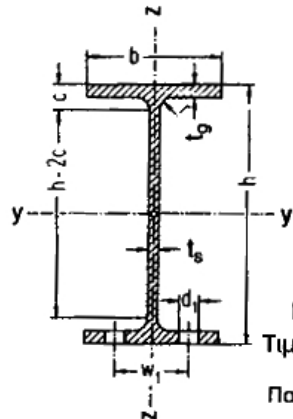
$$I_{x_K} = \frac{bh^3}{36} - \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{15bh^3}{576}$$



Άσκηση 4

- Οι ελατές διατομές του εμπορίου έχουν συγκεκριμένες μορφές. Τα αδρανειακά τους χαρακτηριστικά (εμβαδό, κέντρο βάρους, ροπές αδρανείας κ.λπ.) δίνονται από πίνακες.



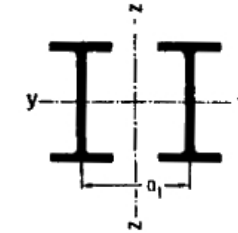


Μέσου Πλάτους Ι-Δοκοί

ΙΡΕ-Σειρά ΙΡΕο και ΙΡΕν-Σειρά

Συνήθη μήκη
για προφίλ ύψους κάτω από 300 mm
πάνω από 300 mm

8 έως 16 m
8 έως 18 m



Πλαστικά Φορτία Διατομής M_{pl} , N_{pl} , V_{pl} και
Τιμές Σχεδιασμού W_{pl} , S_y , I_T , I_w , $I_{z,g}$ βλέπε επόμενη σελίδα.

Παράπλευρη επιφάνεια U βλέπε Σελίδα 44

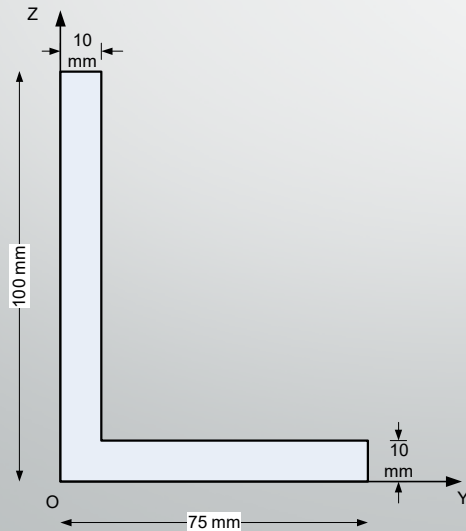
Για την α-1 ισχύει η Οδηγία
DIN EN ISO 12944-3 περί
αντιδιαβρωτικής προστασίας.

Παλιός Συμβολισμός

Συμβολισμός	Διαστάσεις σε mm για						$A_{κορυμ}$	A	G	Γιά τον άξονα κάμψης						S_y	Οπές πελμάτων ¹⁾ κατά DIN 997 Εκδ. Οκτ. 1970	
	h	b	t_s	t_g	r	h-2c				y-y			z-z				d_1	w_1
										I_y	W_y	i_y	I_z	W_z	i_z			
		s	t			F		J_x	W_x	i_x	J_y	W_y	i_y	S_x				
Ι ΡΕ	Μέσου πλάτους Ι με παράλληλες επιφάνειες πελμάτων Σειρά Ι ΡΕ (θερμής κατεργασίας), κατά DIN 1025, Τεύχος 5, Έκδοση Μαρτίου 1994, και EURONORM 19-57 Οριακά μεγέθη και ανοχές κατά DIN EN 10034, Έκδοση Μαρτίου 1994)																	
80	80	46	3,8	5,2	5	59	2,84	7,64	6,00	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	6,9	6,4	26
100	100	55	4,1	5,7	7	74	3,87	10,3	8,10	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	8,6	8,4	30
120	120	64	4,4	6,3	7	93	5,00	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45	10,5	8,4	36
140	140	73	4,7	6,9	7	112	6,26	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65	12,3	11	40
160	160	82	5,0	7,4	9	127	7,63	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	14,0	13 ¹⁾	44
180	180	91	5,3	8,0	9	146	9,12	23,9	18,8	1320	146	7,42	101	22,2	2,05	15,8	13	50
200	200	100	5,6	8,5	12	159	10,7	28,5	22,4	1940	194	8,26	142	28,5	2,24	17,6	13	56
220	220	110	5,9	9,2	12	177	12,4	33,4	26,2	2770	252	9,11	205	37,3	2,48	19,4	17	60
240	240	120	6,2	9,8	15	190	14,3	39,1	30,7	3890	324	9,97	284	47,3	2,69	21,2	17	68
270	270	135	6,6	10,2	15	219	17,1	45,9	36,1	5790	429	11,2	420	62,2	3,02	23,9	21/17	72
300	300	150	7,1	10,7	15	248	20,5	53,8	42,2	8360	557	12,5	604	80,5	3,35	26,6	23	80

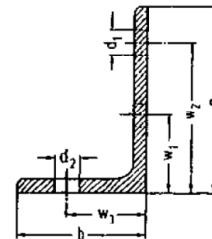
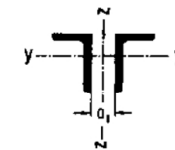
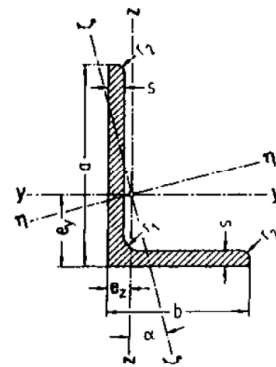
Άσκηση 4

- Να υπολογιστούν τα αδρανειακά χαρακτηριστικά του ανισοσκελούς γωνιακού **L100x75x10** με βάση το απλοποιημένο σχήμα και να συγκριθούν με τις ακριβέστερες τιμές των πινάκων.



Ανισοσκελή Γωνιακά L

Συνήθη μήκη 6 έως 12 m



Για την a_1 να ληφθεί υπόψη το DIN EN 12944-3 για λόγους αντιδιαβρωτικής προστασίας

$i_z = i_{min}$ (για ένα γωνιακό)

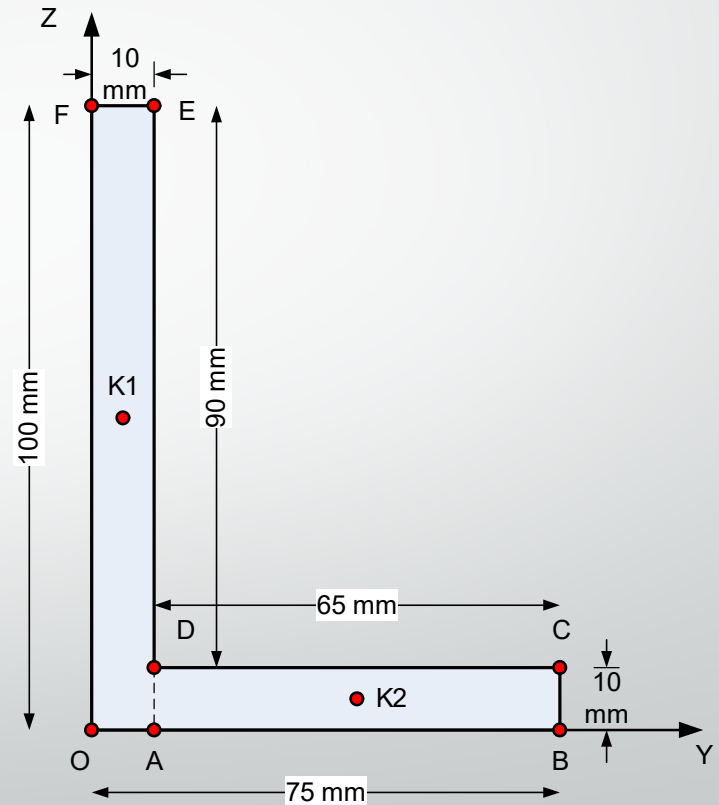
Για παράπλευρη επιφάνεια U βλέπε Σελίδα 45

Γαλός Συμβολισμός

Διαστάσεις σε mm	a	b	s	r ₁	r ₂	A	G	Αποστάσεις αξόνων		Για τον άξονα κάμψης								Οπές πελάτων) κατά DIN 997 Εκδ. Οκτ. 1970										
								Απόσταση	Αξών ζ-ζ	y-y			z-z			η-η		ζ-ζ		d ₁	d ₂	w ₁	w ₃					
										e _y	e _z	tan α	I _y	W _y	i _y	I _z	W _z	i _z	I _η					i _η	I _ζ	i _ζ		
Συμβολισμός						F		e _x	e _y		I _x	W _x	i _x	I _y	W _y	i _y	I _ξ	i _ξ	I _η	i _η								
L	Ανισοσκελή γωνιακά με στρογγυλεμένες γωνίες (θερμής έλασης), κατά DIN EN 10056-1, έκδοση Οκτωβρίου 1998. Αντικατάσταση του DIN 1029, έκδοση Μαρτίου 1994. Αποκλίσεις διαστάσεων και ροφών κατά DIN EN 10056-2, έκδοση Μαρτίου 1994.																											
100x75x8	10	5		13,5	10,6	3,10	1,87	0,547	133	19,3	3,14	64,1	11,4	2,18	182	3,47	34,6	1,60	25	23	55	40						
10	10	5		16,8	13,0	3,19	1,95	0,544	162	23,8	3,12	77,6	14,0	2,16	197	3,45	42,2	1,59	25	23	55	40						
12	10	5		19,7	15,4	3,27	2,03	0,540	189	28,0	3,10	90,2	16,5	2,14	230	3,42	49,5	1,59	25	23	55	40						

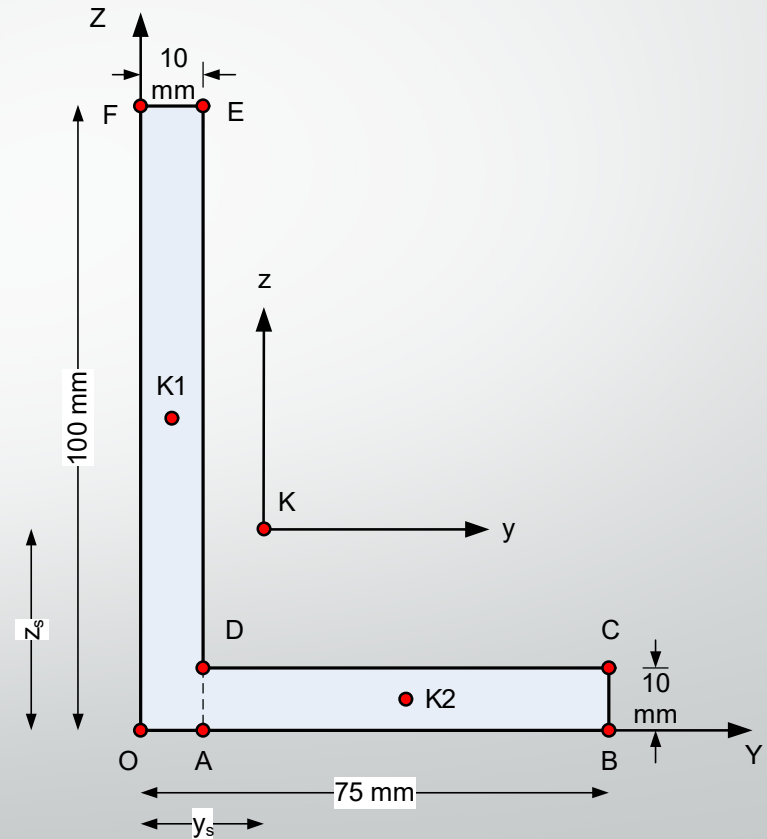
Άσκηση 4

- Χωρίζουμε τις περιοχές:
 - #1 (OAEF)
 - #2 (ABCD).
- $A_1 = 100\text{mm} \cdot 10\text{mm} = 1000\text{mm}^2$
- $A_2 = 65\text{mm} \cdot 10\text{mm} = 650\text{mm}^2$
- $A = A_1 + A_2 = 1650\text{mm}^2$
- Η τιμή που δίνεται στους πίνακες είναι 1660mm^2 (~0.6% σφάλμα).



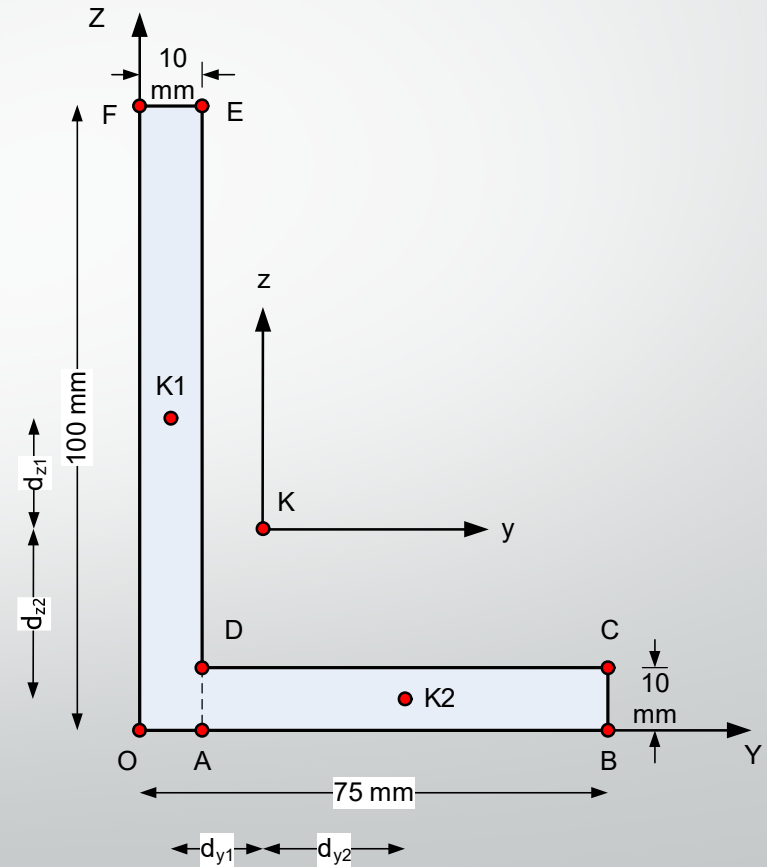
Άσκηση 4

- Κέντρα βάρους:
 - K1 (5 mm, 50 mm)
 - K2 (42.5 mm, 5 mm)
- Κέντρο βάρους της διατομής:
 - $y_s = \frac{\sum(A_i \cdot y_{Ki})}{A} = \frac{1000 \cdot 5 + 650 \cdot 42.5}{1650} = 19.77 \text{ mm}$
 - $z_s = \frac{\sum(A_i \cdot z_{Ki})}{A} = \frac{1000 \cdot 50 + 650 \cdot 5}{1650} = 32.27 \text{ mm}$
- Οι τιμές των πινάκων είναι:
 - $y_s = 19.5 \text{ mm}$ (~1.4% σφάλμα)
 - $z_s = 31.9 \text{ mm}$ (~1.1% σφάλμα)



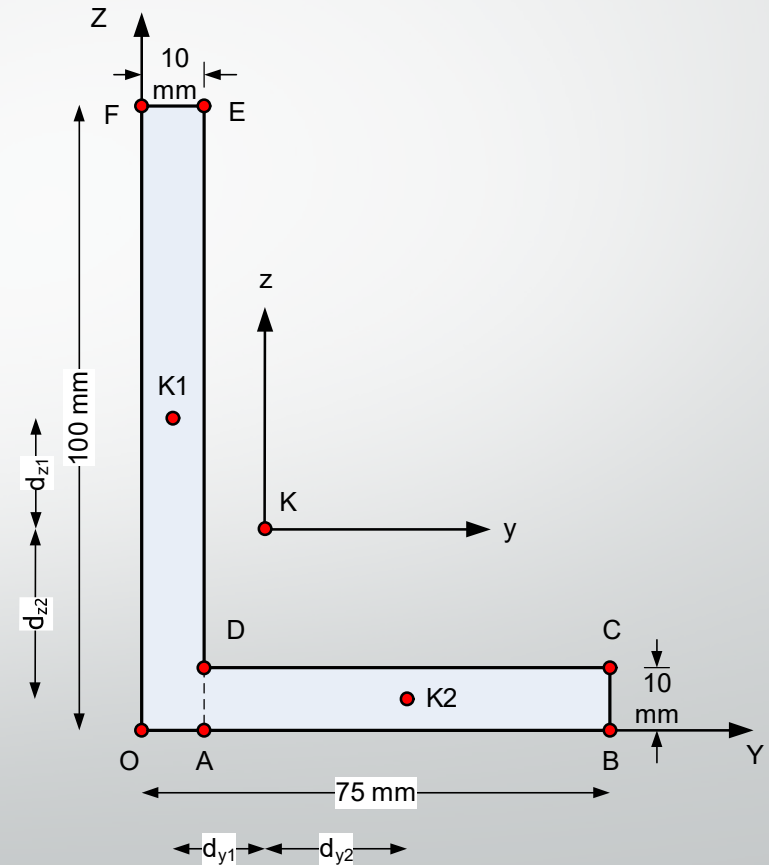
Άσκηση 4

- Αποστάσεις:
- $d_{z1} = 50\text{mm} - 32.27\text{mm} = 17.73\text{mm}$
- Συνεισφορά του #1 στην I_y
- $$I_{y,1} = I_{y,K1} + A_1 \cdot d_{z1}^2$$
$$= \frac{10\text{mm} \cdot (100\text{mm})^3}{12} + 1000\text{mm}^2 (17.73\text{mm})^2$$
$$= 833333.3\text{mm}^4 + 314352.9\text{mm}^4$$
$$= 1147686.2\text{mm}^4$$



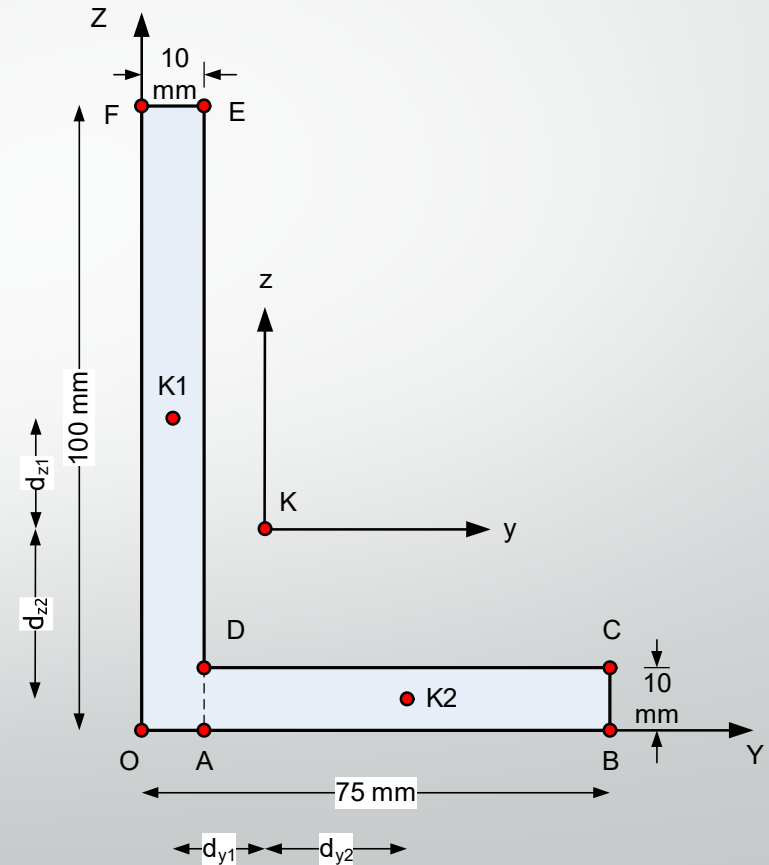
Άσκηση 4

- Αποστάσεις:
- $d_{z2} = 32.27\text{mm} - 5\text{mm} = 27.27\text{mm}$
- Συνεισφορά του #2 στην I_y
- $I_{y,2} = I_{y,K2} + A_2 \cdot d_{z2}^2$
 $= \frac{65\text{mm} \cdot (10\text{mm})^3}{12} + 650\text{mm}^2 \cdot (27.27\text{mm})^2$
 $= 5416.7\text{mm}^4 + 483374.4\text{mm}^4$
 $= 488791.1\text{mm}^4$



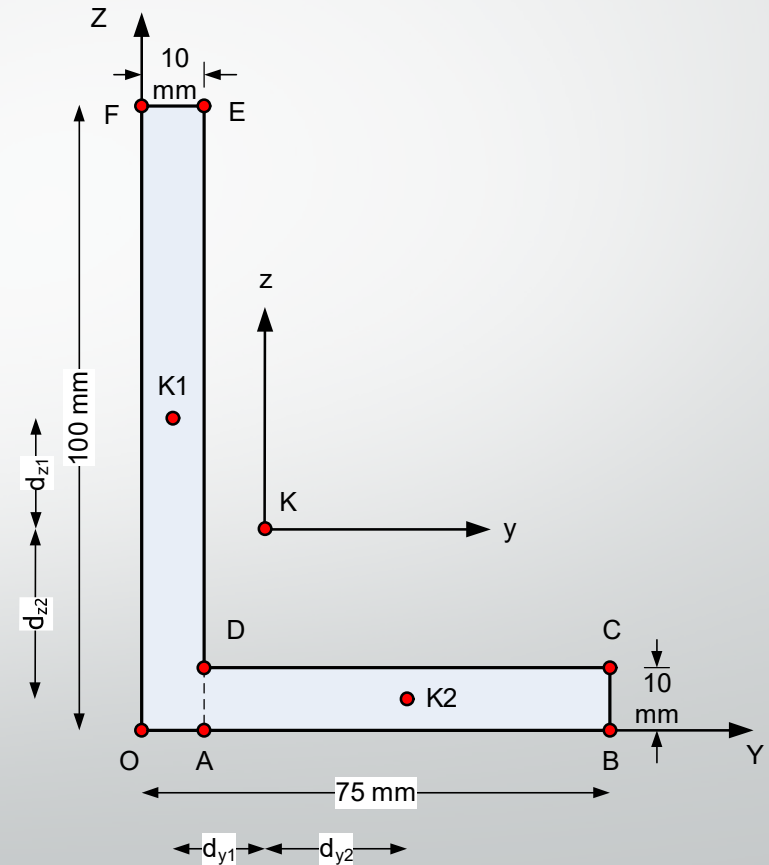
Άσκηση 4

- Συνολικά:
- $I_y = I_{y,1} + I_{y,2}$
 $= 1147686.2\text{mm}^4 + 488791.1\text{mm}^4$
 $= 1636477.2\text{mm}^4 \cong 163.65\text{cm}^4$
- Η ακριβής τιμή από τους πίνακες είναι 162cm^4 (~1% σφάλμα).



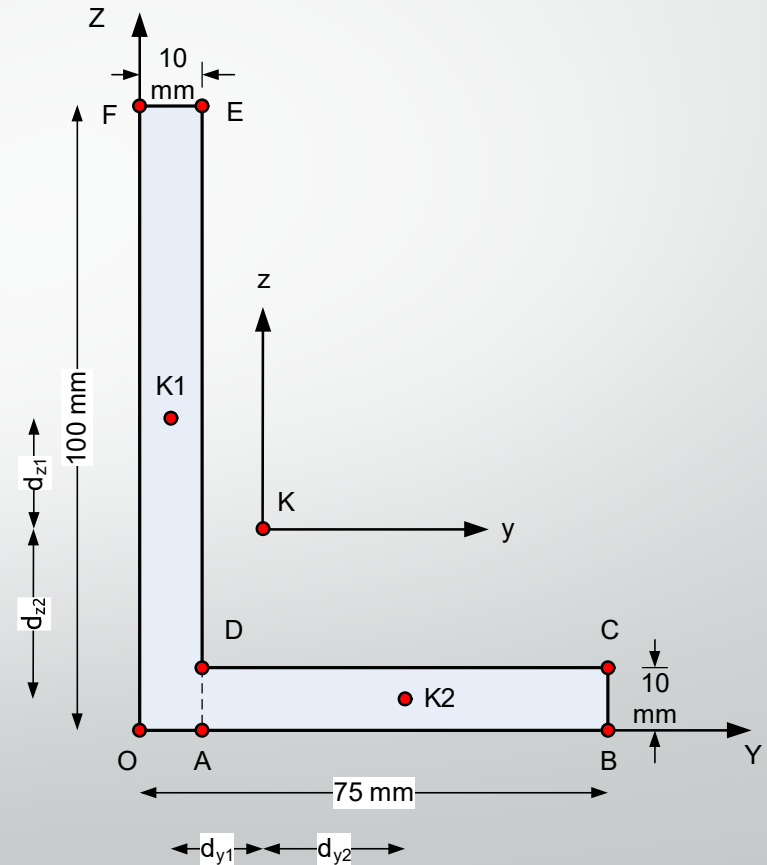
Άσκηση 4

- Αποστάσεις:
- $d_{y1} = 19.77\text{mm} - 5\text{mm} = 14.77\text{mm}$
- Συνεισφορά του #1 στην I_z
- $I_{z,1} = I_{z,K1} + A_1 \cdot d_{y1}^2$
 $= \frac{100\text{mm} \cdot (10\text{mm})^3}{12} + 1000\text{mm}^2 (14.77\text{mm})^2$
 $= 8333.3\text{mm}^4 + 218152.9\text{mm}^4$
 $= 226486.2\text{mm}^4$



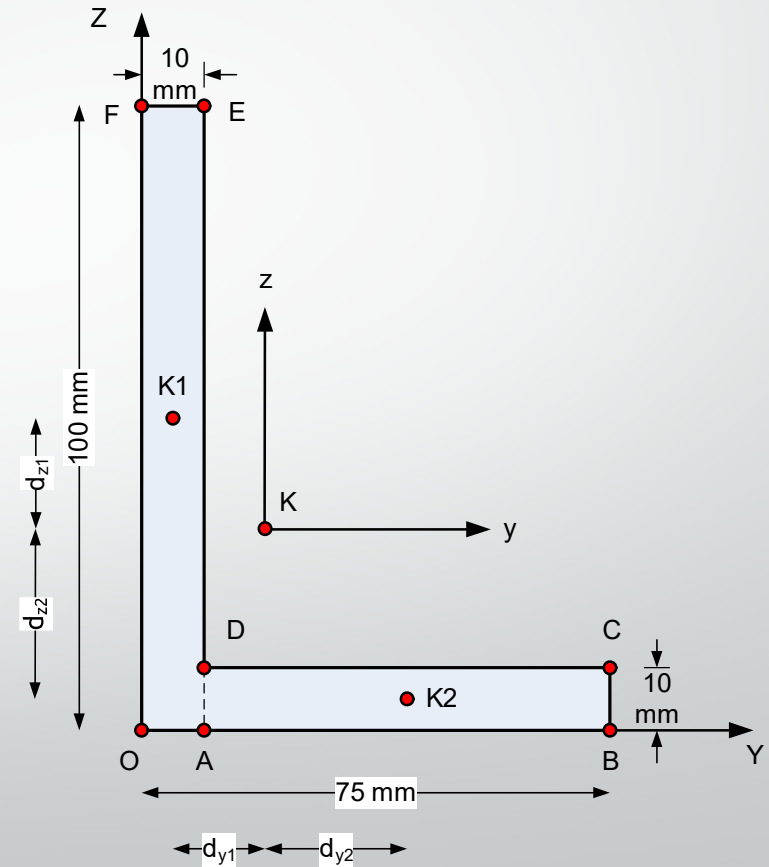
Άσκηση 4

- Αποστάσεις:
- $d_{y2} = 42.5\text{mm} - 19.77\text{mm} = 22.73\text{mm}$
- Συνεισφορά του #2 στην I_z
- $$I_{z,2} = I_{z,K2} + A_2 \cdot d_{y2}^2$$
$$= \frac{10\text{mm} \cdot (65\text{mm})^3}{12} + 650\text{mm}^2 \cdot (22.73\text{mm})^2$$
$$= 228854.2\text{mm}^4 + 335824.4\text{mm}^4$$
$$= 564678.6\text{mm}^4$$



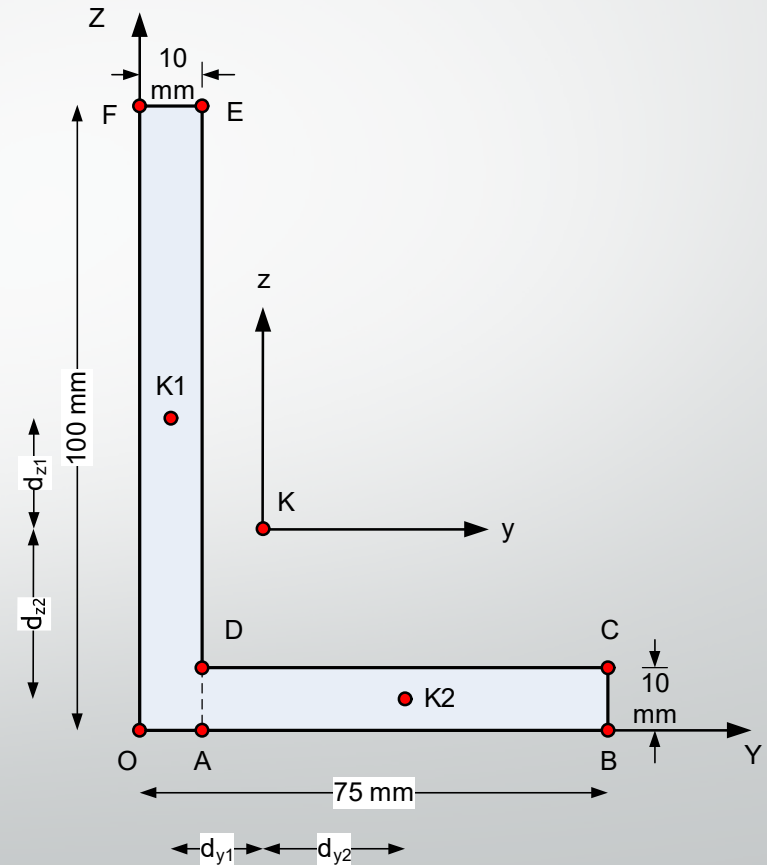
Άσκηση 4

- Συνολικά:
- $I_z = I_{z,1} + I_{z,2}$
 $= 226486.2\text{mm}^4 + 564678.6\text{mm}^4$
 $= 791164.8\text{mm}^4 \cong 79.12\text{cm}^4$
- Η ακριβής τιμή από τους πίνακες είναι 77.6cm^4 (~1.9% σφάλμα).



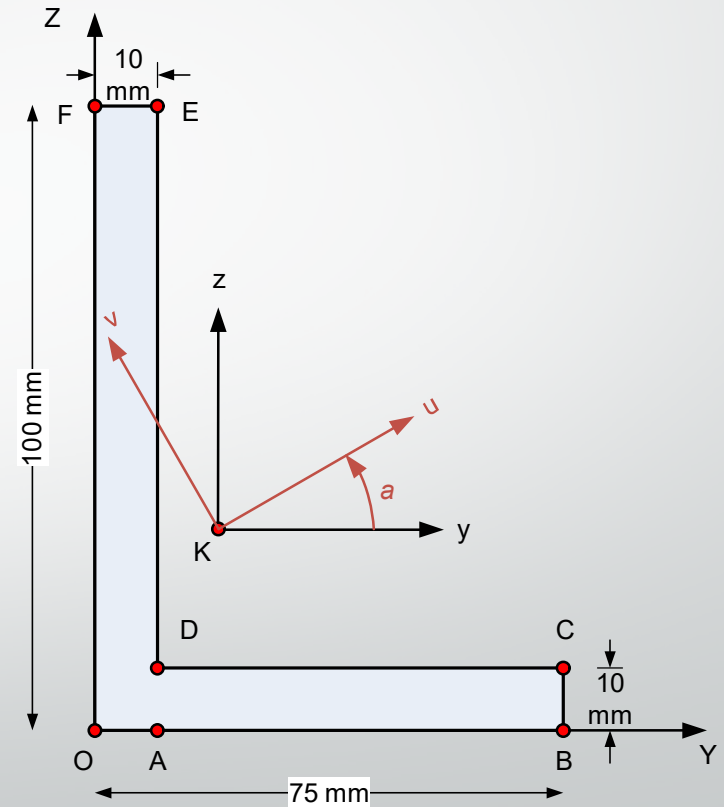
Άσκηση 4

- Το K_{yz} είναι κεντροβαρικό αλλά όχι κύριο.
- Πράγματι:
- $$I_{yz} = I_{yz,1} + I_{yz,2}$$
$$= 0 + 1000\text{mm}^2 \cdot (19.77\text{mm} - 5\text{mm}) \cdot$$
$$(32.27\text{mm} - 50\text{mm}) +$$
$$0 + 650\text{mm}^2 \cdot (19.77\text{mm} - 42.5\text{mm}) \cdot$$
$$(32.27\text{mm} - 5\text{mm})$$
$$= -664772.7\text{mm}^4 \cong -66.48\text{cm}^4$$



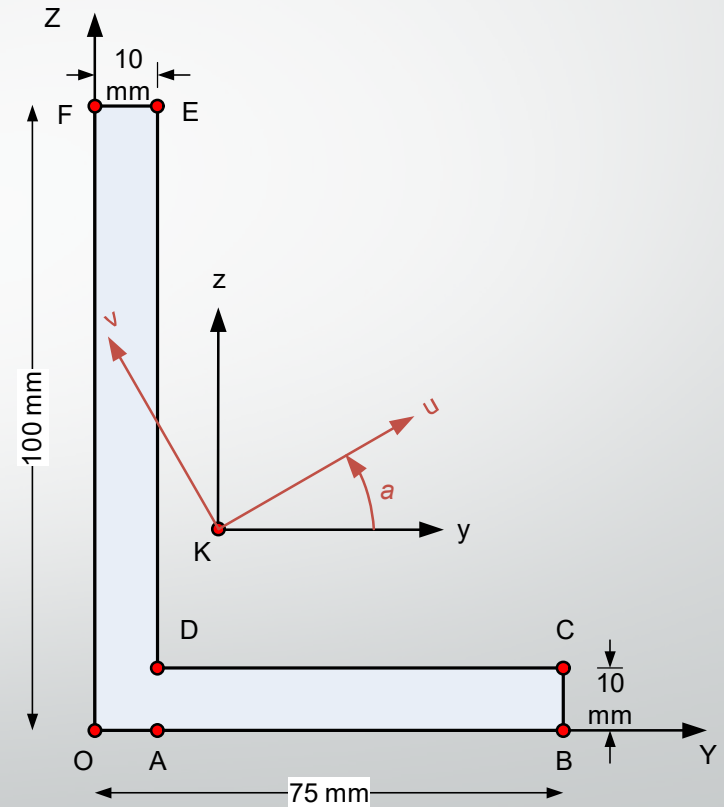
Άσκηση 4

- Υπολογισμός γωνίας στροφής για κύριο σύστημα αξόνων:
- $$\tan(2a) = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$
$$= \frac{2 \cdot 66.48 \text{ cm}^4}{163.68 \text{ cm}^4 - 79.13 \text{ cm}^4} = 1.573 \Rightarrow$$
$$a = \frac{\arctan(1.573)}{2} \cong 28.78^\circ$$
- Η τιμή από τους πίνακες είναι $\tan(a) = 0.544$ ενώ $\tan(28.78^\circ) = 0.549$. (~0.7% σφάλμα).



Άσκηση 4

- Κύριες ροπές αδρανείας:
- $$I_u = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$
$$= \frac{163.65 + 79.12}{2}$$
$$+ \frac{163.65 - 79.12}{2} \cos(57.56^\circ)$$
$$- (-66.48) \sin(57.56^\circ)$$
$$= 121.385 + 42.265 \cdot 0.5364 + 66.48 \cdot 0.8440$$
$$= 200.17 \text{ cm}^4$$
- Η ακριβής τιμή είναι 197 cm^4 (~1.6% σφάλμα)



Άσκηση 4

- Κύριες ροπές αδρανείας:

$$\begin{aligned}
 I_v &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\
 &= \frac{163.65 + 79.12}{2} \\
 &\quad - \frac{163.65 - 79.12}{2} \cos(57.56^\circ) \\
 &\quad + (-66.48) \sin(57.56^\circ) \\
 &= 121.385 - 42.265 \cdot 0.5364 - 66.48 \cdot 0.8440 \\
 &= 42.60 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

- Η ακριβής τιμή είναι 42.2 cm^4 (~0.9% σφάλμα)

