

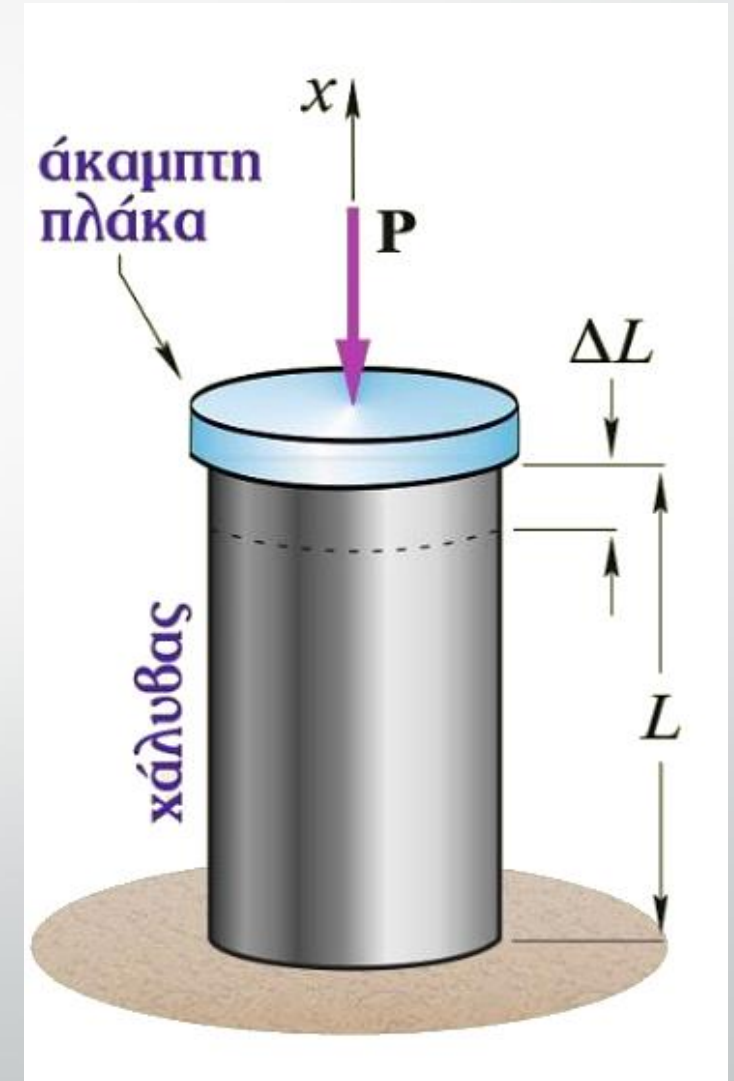


Ασκήσεις

Νόμος του Hooke

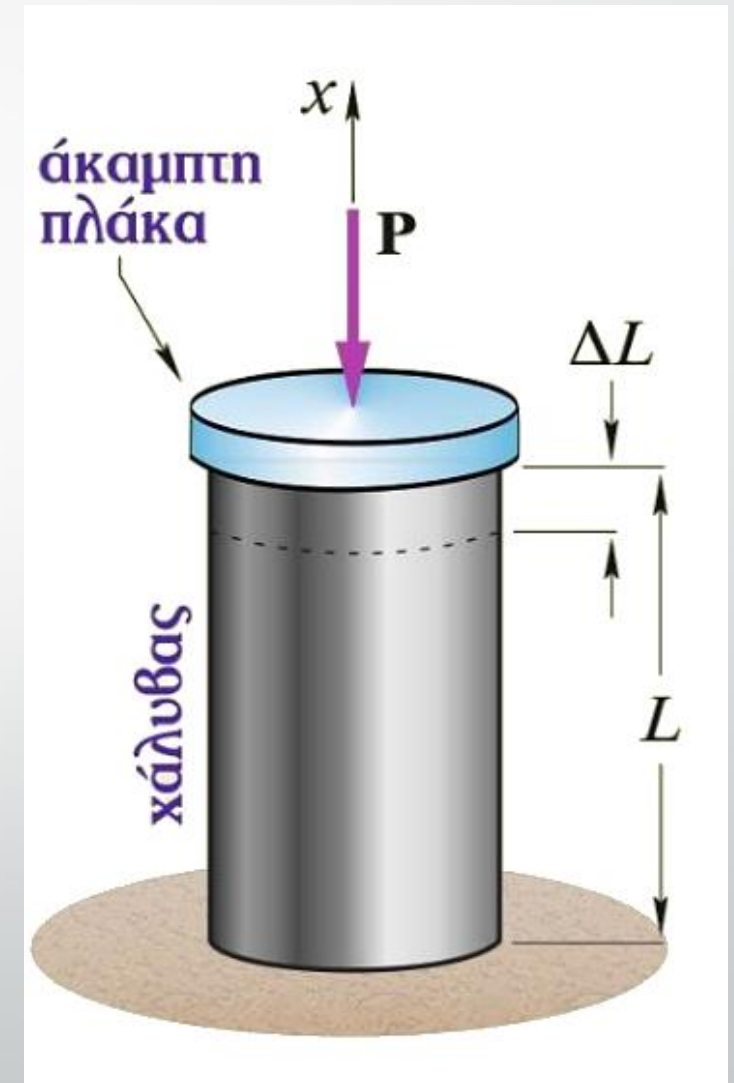
Άσκηση 1

- Κοίλος κύλινδρος (σωλήνας) φορτίζεται ομοιόμορφα μέσω άκαμπτης πλάκας από θλιπτικό φορτίο P . Αν αγνοηθεί το ίδιο βάρος, να υπολογιστεί η επιβράχυνση ΔL καθώς και η μέση ορθή τάση.
- Δίνονται: εξωτερική διάμετρος $D = 10\text{cm}$, πάχος $t = 5\text{mm}$, $P = 100\text{kN}$, $L = 4\text{m}$, $E = 210\text{GPa}$.



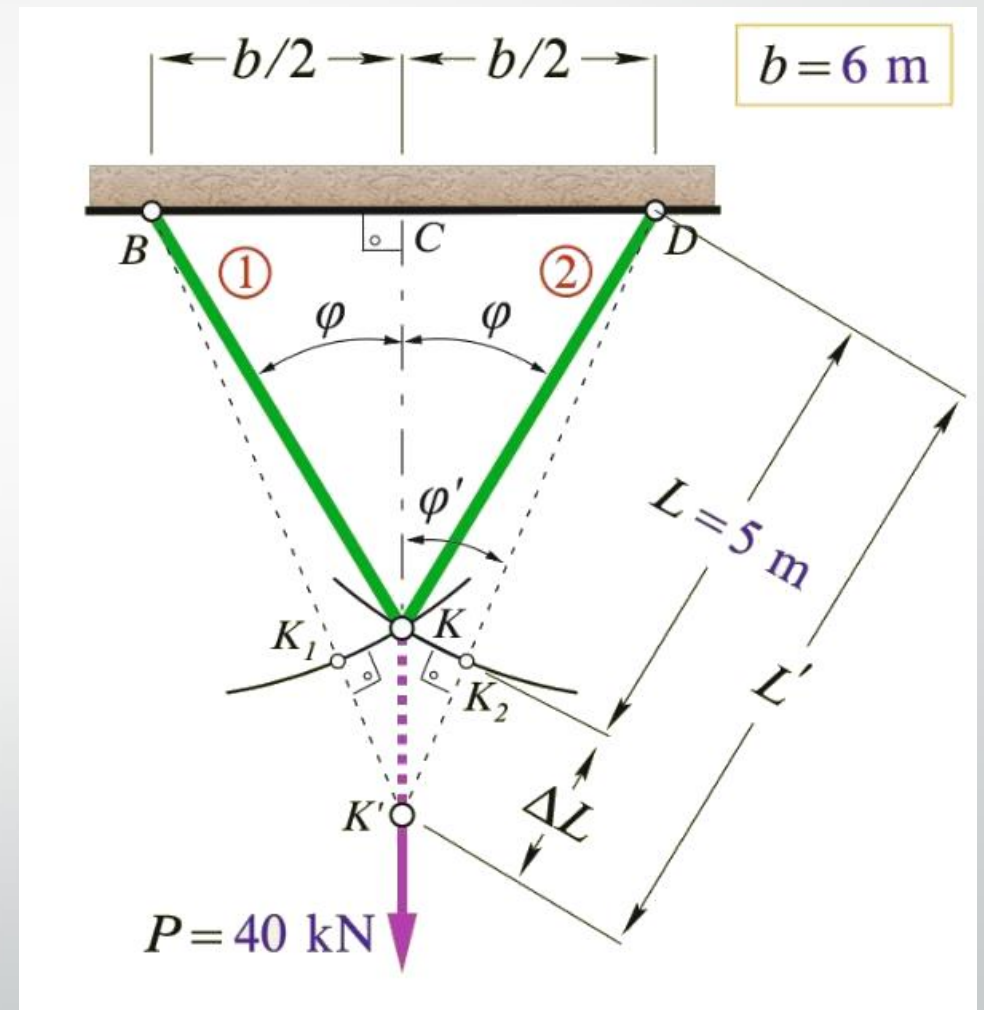
Άσκηση 1

- $$\Delta L = \frac{-P}{EA} L = \frac{-100\text{kN}}{210 \times 10^6 \text{kN/m}^2 \times \pi \left(\frac{0,1^2 - 0,09^2}{4} \right) \text{m}^2} 4\text{m}$$
$$= -0,00127643\text{m} \cong -1,28\text{mm}.$$
- $$\sigma = \frac{-P}{A} = \frac{-100\text{kN}}{\pi \left(\frac{0,1^2 - 0,09^2}{4} \right) \text{m}^2} = -67012,6\text{kPa} \cong -67\text{MPa}.$$



Άσκηση 2

- Ζητείται η μετακίνηση του κόμβου K υπό την επίδραση της δύναμης P .
- Δίνονται: $A = 4\text{cm}^2$, $b = 6\text{m}$, $P = 40\text{kN}$, $L = 5\text{m}$, $E = 210\text{GPa}$.



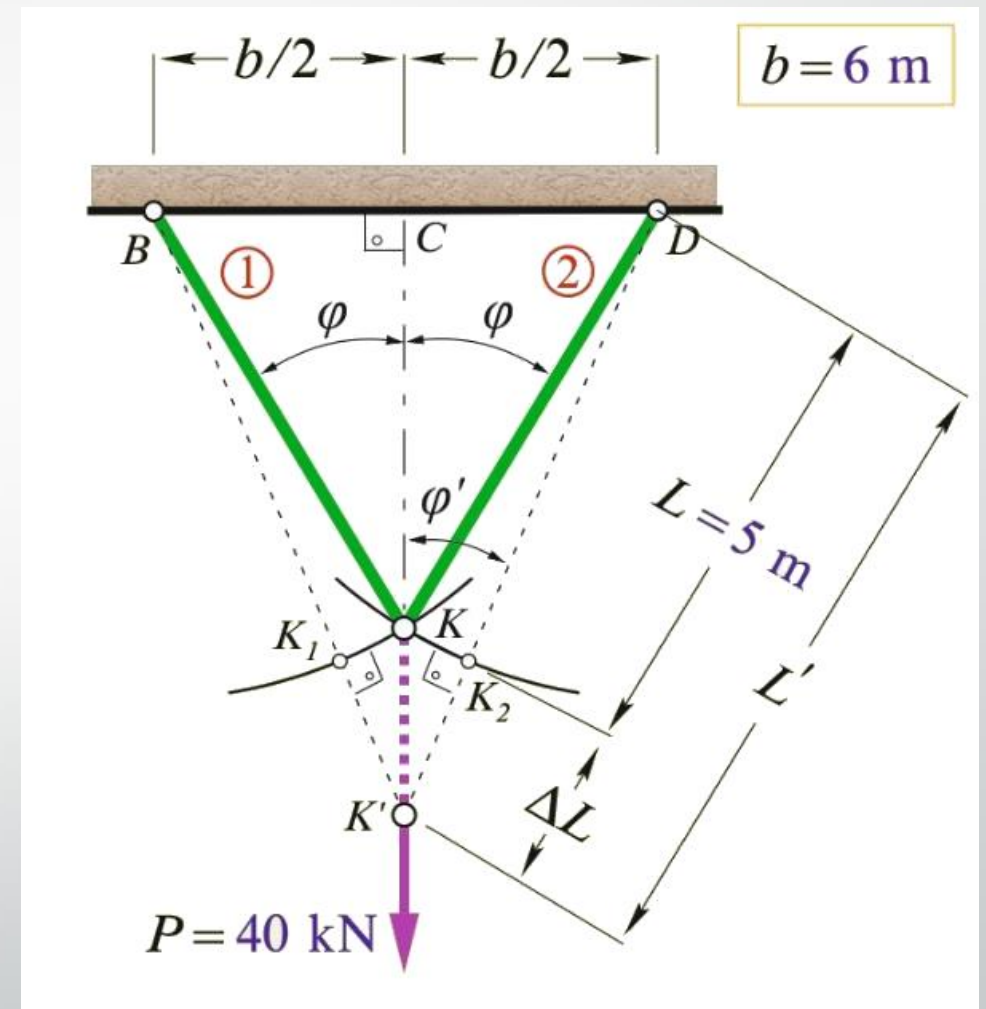
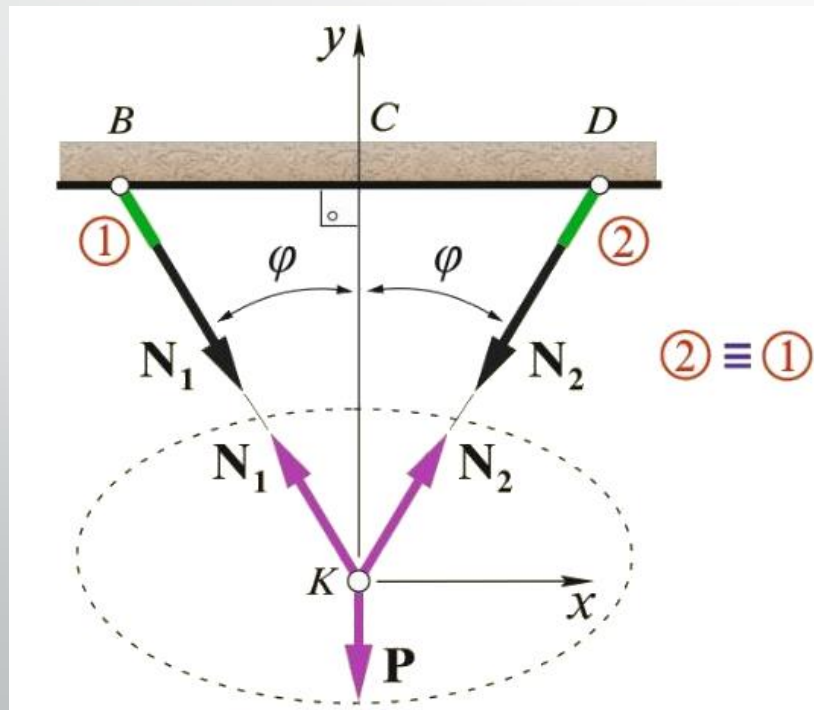
Άσκηση 2

- Λόγω συμμετρίας $N_1 = N_2 = N$. Από ισορροπία του κόμβου K ,

$$2N\cos\varphi = P \Rightarrow N = \frac{P}{2\cos\varphi} = 25\text{kN}$$

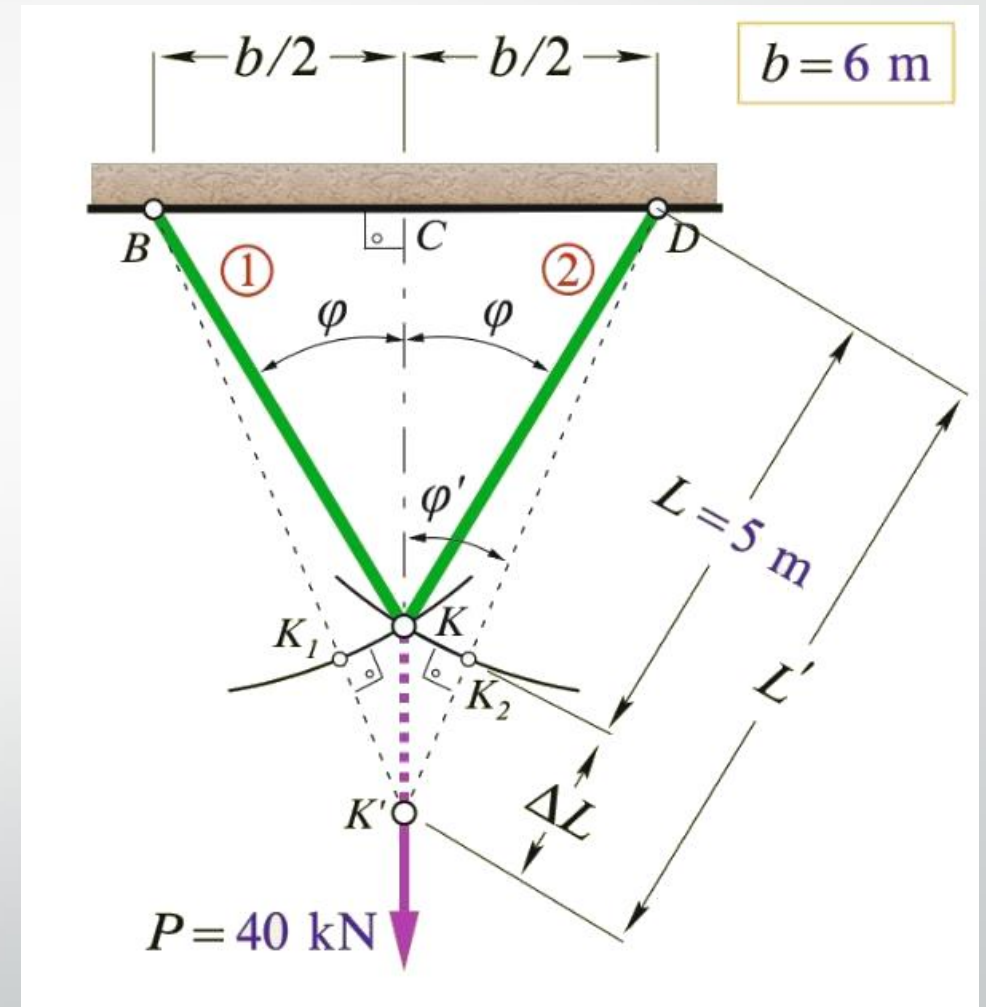
- διότι $\sin\varphi = \frac{b/2}{L} = \frac{3}{5}$, $\varphi \cong 36,87^\circ$,

$$\cos\varphi = \frac{4}{5}$$



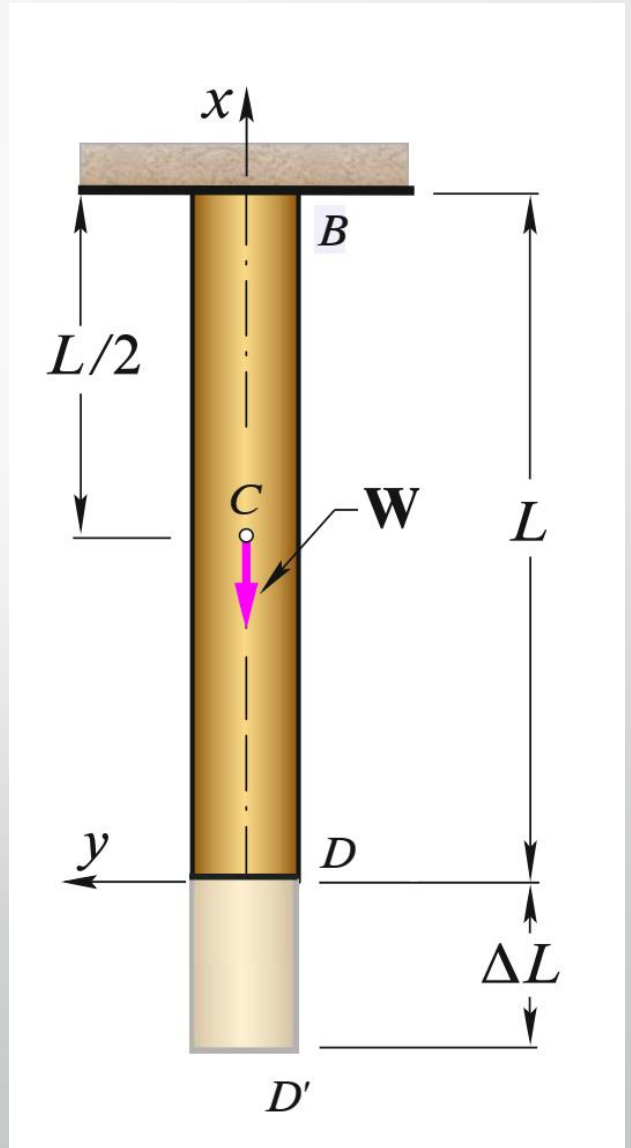
Άσκηση 2

- $\Delta L = \frac{N}{EA} L = \frac{25 \text{ kN}}{210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \times 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2} 5 \text{ m}$
 $= 0,0014881 \text{ m} \cong 1,49 \text{ mm}.$
- Η γωνία φ δεν αλλάζει πρακτικά, οπότε
$$KK' = \frac{\Delta L}{\cos \varphi} = 1,86 \text{ mm}$$
- Πράγματι, $\sin \varphi' = \frac{\frac{b}{2}}{L + \Delta L} = \frac{3}{5,0014881}, \varphi' \cong 36,86^\circ.$
- Αν η γωνία άλλαζε σημαντικά, θα μπορούσαμε να κάνουμε επαναληπτικά τον ίδιο υπολογισμό μέχρι σύγκλισης.



Άσκηση 3

- Δίνεται η πακτωμένη κατακόρυφη ράβδος του σχήματος. Να βρεθεί η επιμήκυνση ΔL λόγω ίδιου βάρους σε κάθε θέση της δοκού. Δίνονται A, L, E, γ .

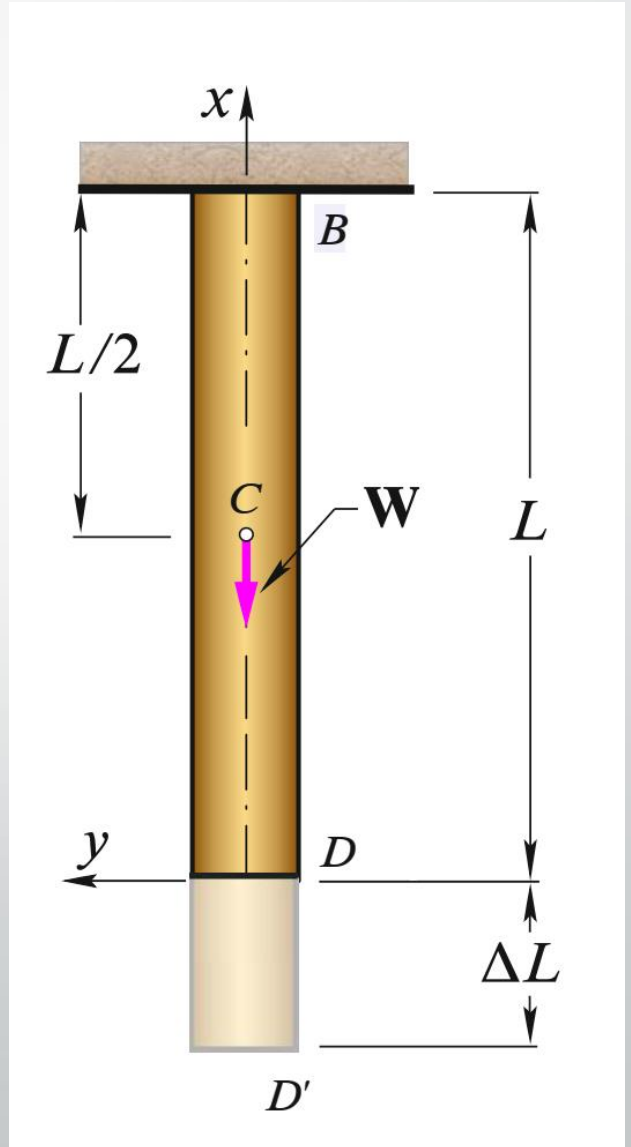


Άσκηση 3

- **Προσοχή!** Η ένταση του ίδιου βάρους δεν είναι η ίδια καθ' ύψος. Συνεπώς αν θέλαμε να υπολογίσουμε την συνολική επιμήκυνση και χρησιμοποιούσαμε την σχέση

$$\Delta L = \frac{W}{EA} L = \frac{\gamma AL}{EA} L = \frac{\gamma L^2}{E}$$

δεν θα παίρναμε το σωστό αποτέλεσμα.

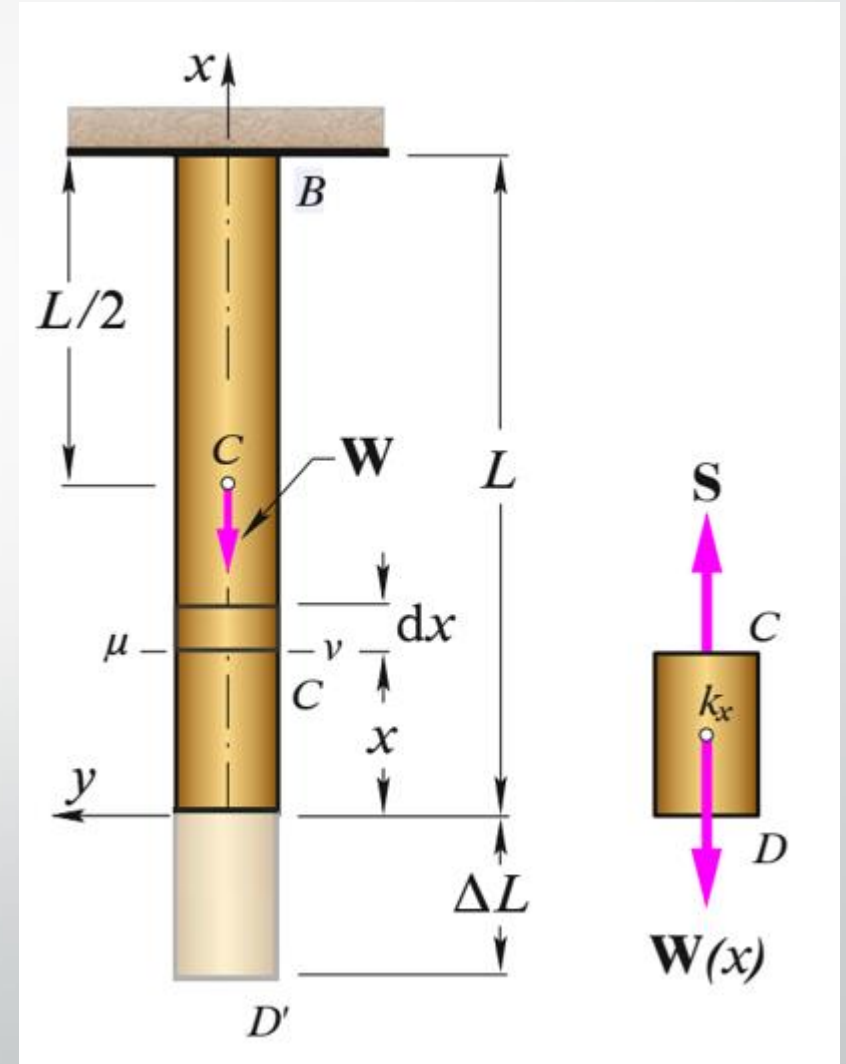


Άσκηση 3

- Θεωρούμε άξονα x κατακόρυφο, με $x = 0$ στο **κάτω** άκρο της δοκού.
- Η ορθή τάση: $\sigma(x) = \frac{W(x)}{A} = \frac{x A \gamma}{A} = \gamma x$.
- Η επιμήκυνση στοιχειώδους τμήματος μήκους dx λόγω εφελκυστικής τάσης $\sigma(x)$ θα είναι:

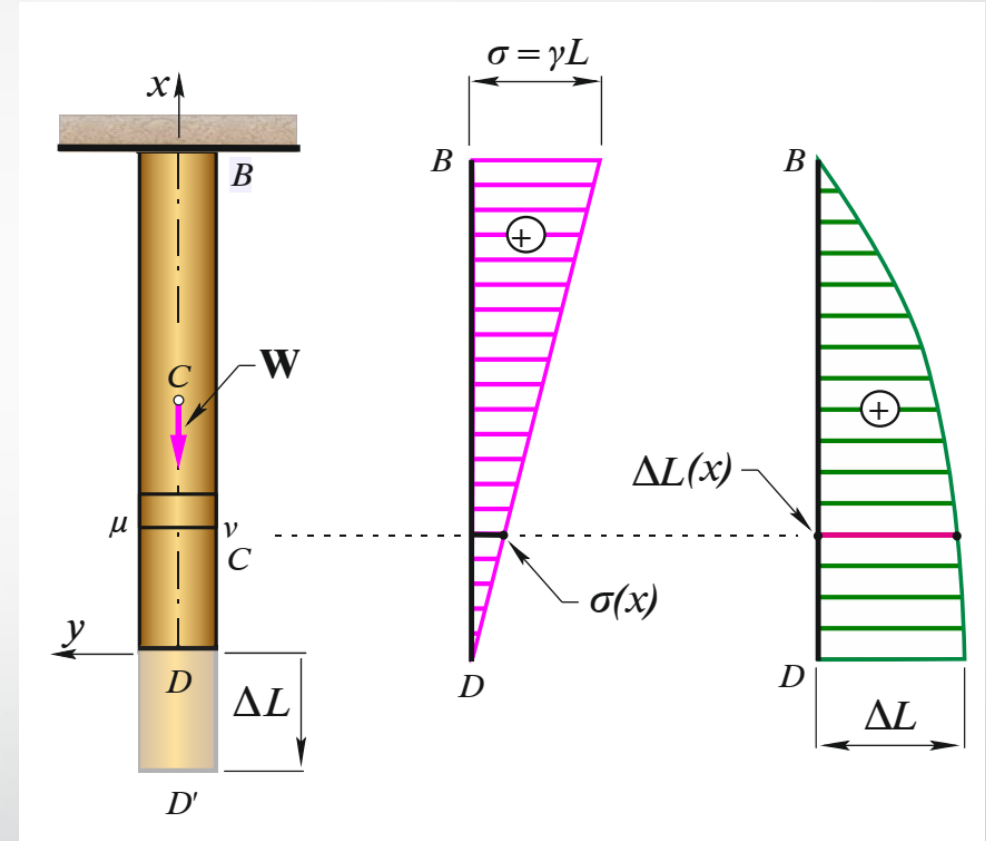
$$du = \varepsilon dx = \frac{\sigma(x)}{E} dx \quad \text{ή} \quad du = \frac{W(x)}{EA} dx$$

- Τότε $\Delta L(x) = \int_x^L du = \int_x^L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \int_x^L \frac{\gamma x}{E} dx = \frac{\gamma}{E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_x^L = \frac{\gamma}{2E} (L^2 - x^2)$



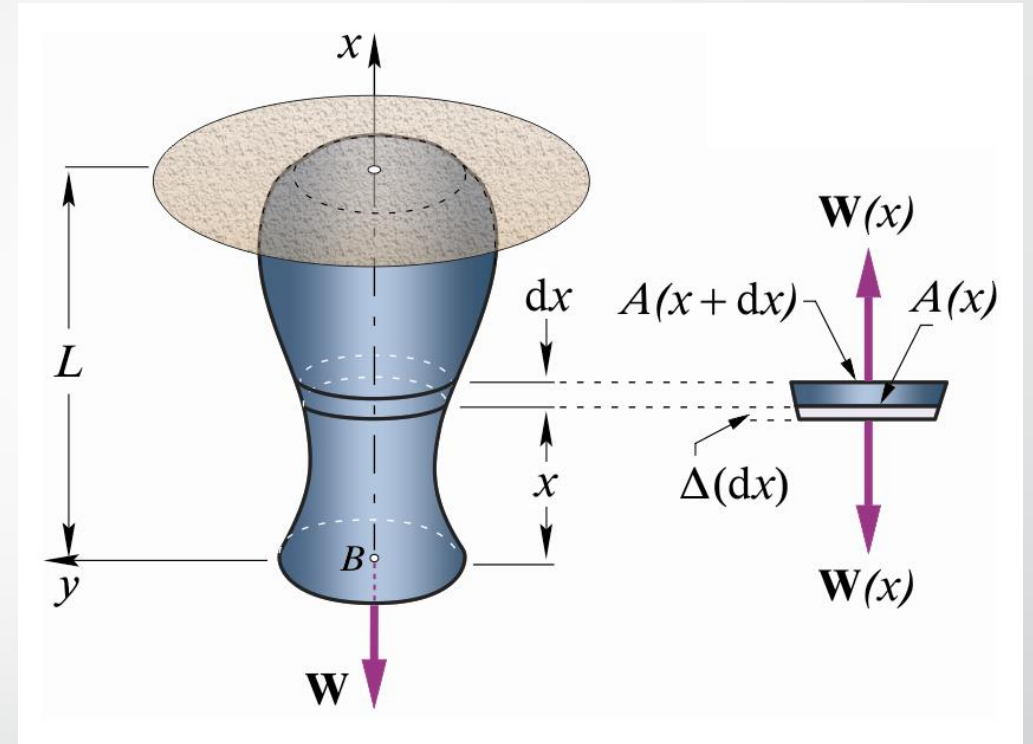
Άσκηση 3

- $\Delta L(x) = \frac{\gamma}{2E} (L^2 - x^2)$.
- Η μέγιστη ολική επιμήκυνση δίνεται για $x = 0$, όπου $\Delta L = \Delta L(0) = \frac{\gamma L^2}{2E}$.
- Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν θεωρούσαμε ότι το βάρος W επιμηκύνει το μισό άνω τμήμα της δοκού ($L/2$) και παίρναμε τον απλοποιητικό τύπο.



Άσκηση 4

- Δίνεται η πακτωμένη κατακόρυφη **μη** **πρισματική** ράβδος του σχήματος. Να βρεθεί η συνολική επιμήκυνση ΔL_w λόγω ίδιου βάρους. Δίνονται $A(x)$, L , E , γ .



Άσκηση 4

- Η ορθή τάση:

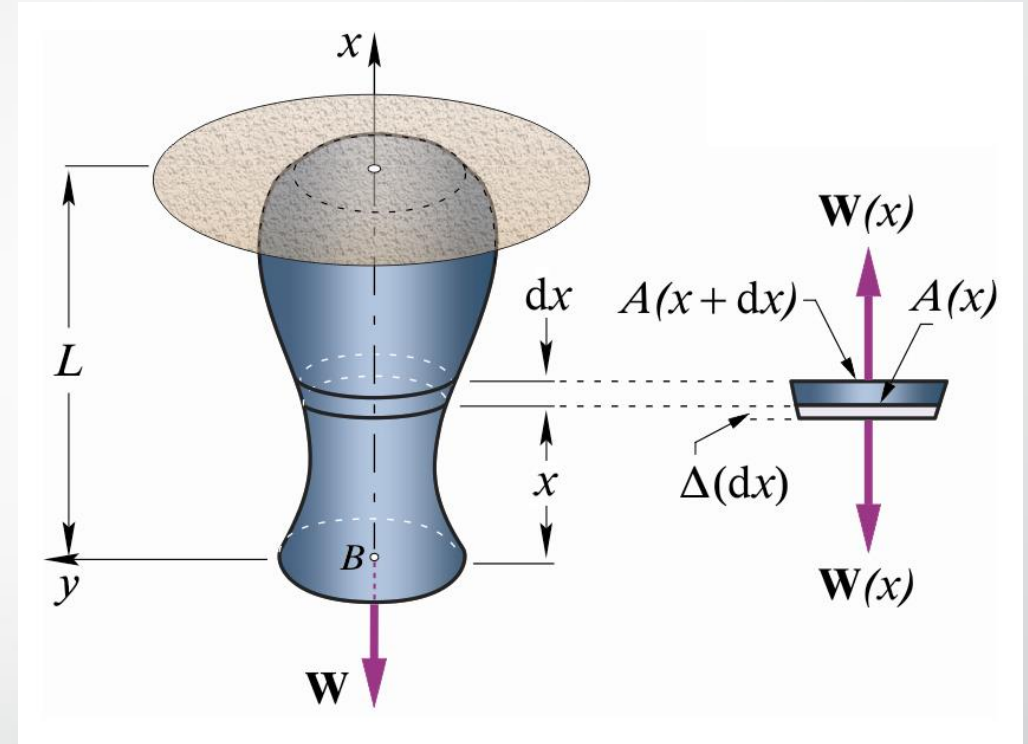
$$\sigma(x) = \frac{W(x)}{A(x)} = \frac{V(x)\gamma}{A(x)}$$

όπου $V(x)$ η συνάρτηση που δίνει **τον συνολικό όγκο του υλικού κάτω από τομή σε θέση x** :

$$V(x) = \int_0^x dV = \int_0^x A(x) dx$$

- Η επιμήκυνση στοιχειώδους τμήματος μήκους dx λόγω εφελκυστικής τάσης $\sigma(x)$ θα είναι:

$$du = \varepsilon dx = \frac{\sigma(x)}{E} dx \quad \text{ή} \quad du = \frac{V(x)\gamma}{EA(x)} dx$$



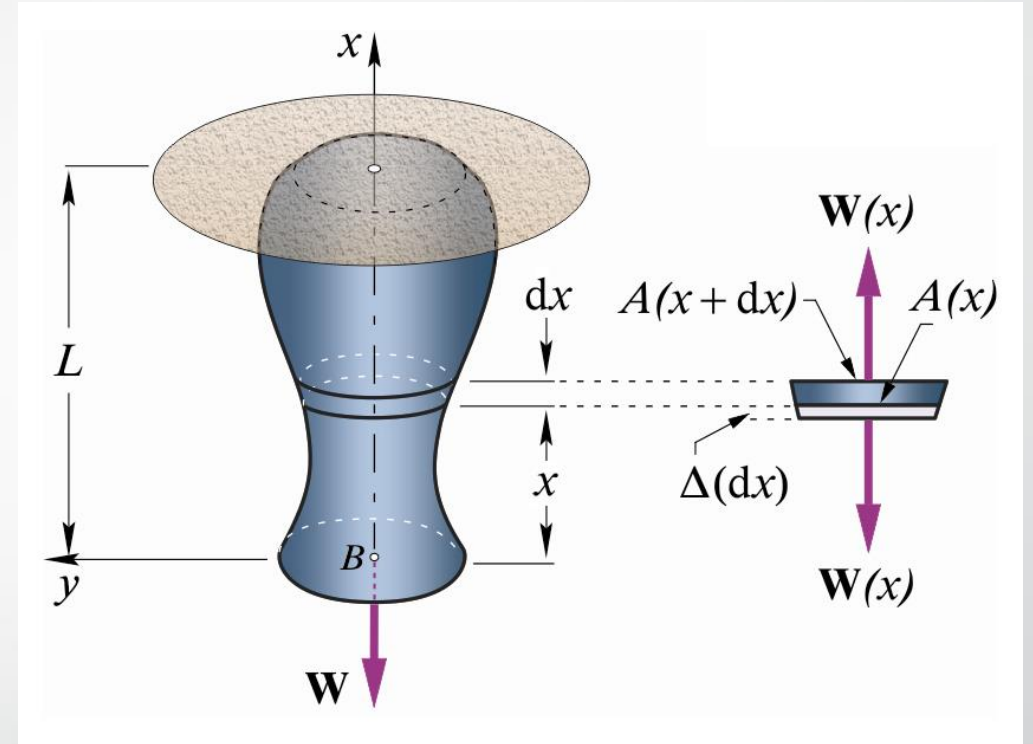
Άσκηση 4

- Τότε:

$$\Delta L_w = \int_0^L du = \int_0^L \frac{V(x)\gamma}{EA(x)} dx \Rightarrow$$

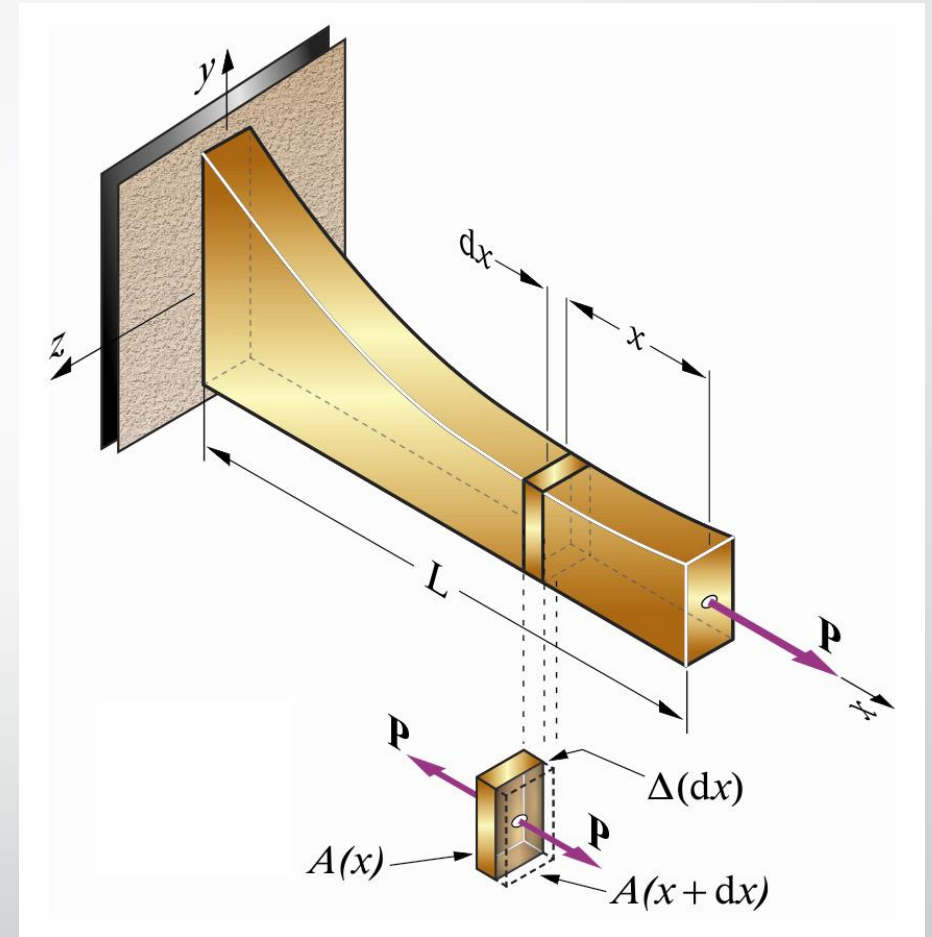
$$\Delta L_w = \frac{\gamma}{E} \int_x^L \frac{V(x)}{A(x)} dx$$

- $M\varepsilon V(x) = \int_0^x A(x) dx$



Άσκηση 5

- Δίνεται η πακτωμένη αβαρής **μη** **πρισματική** ράβδος του σχήματος. Να βρεθεί η συνολική επιμήκυνση ΔL_P λόγω σταθερής δύναμης P . Δίνονται $A(x)$, L , E .



Άσκηση 5

- Η ορθή τάση:

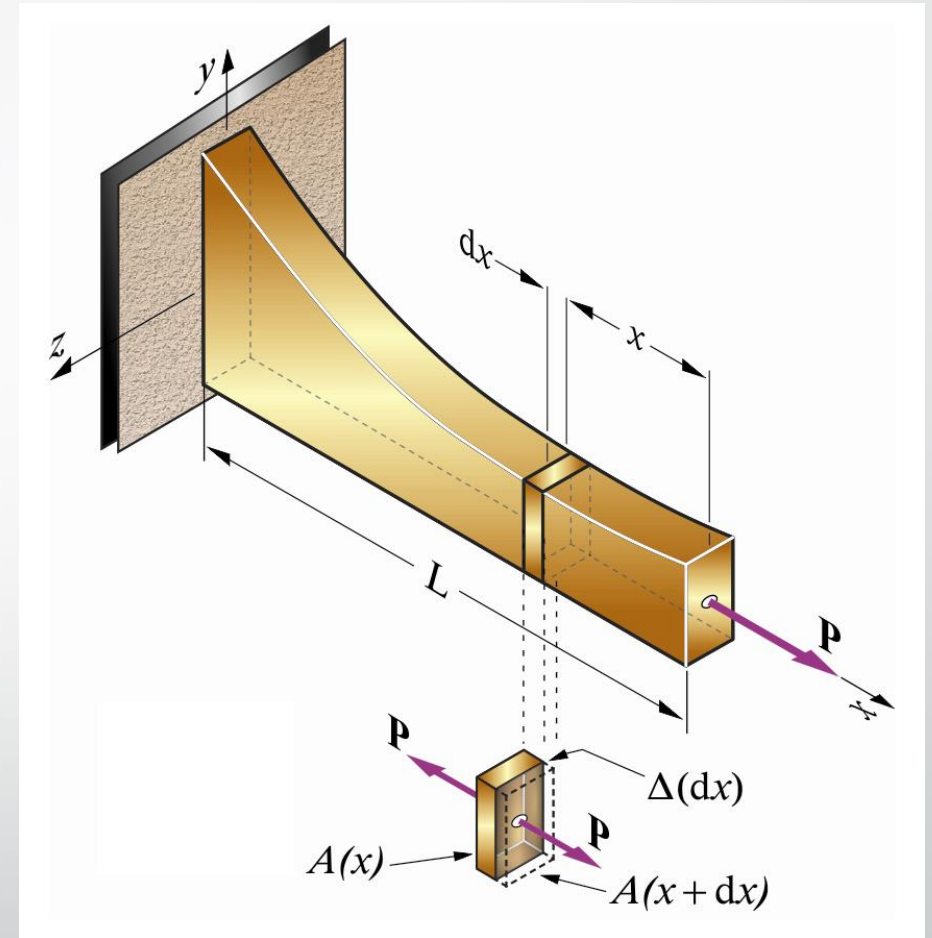
$$\sigma(x) = \frac{P}{A(x)}$$

- Η επιμήκυνση στοιχειώδους τμήματος μήκους dx λόγω εφελκυστικής τάσης $\sigma(x)$ θα είναι:

$$du = \varepsilon dx = \frac{\sigma(x)}{E} dx \quad \text{ή} \quad du = \frac{P}{EA(x)} dx$$

- Τότε:

$$\Delta L_P = \int_0^L du \Rightarrow \Delta L_P = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$



Άσκηση 5

- **Συνέχεια άσκησης:** να γίνει εφαρμογή σε αβαρή κόλουρο κώνο, μεγάλης ακτίνας R , μικρής ακτίνας r και μήκους ℓ , που εφελκύεται από δύναμη P .
- Η ακτίνα ρ σε θέση x από την μη πακτωμένη άκρη του κώνου θα είναι (από όμοια τρίγωνα):

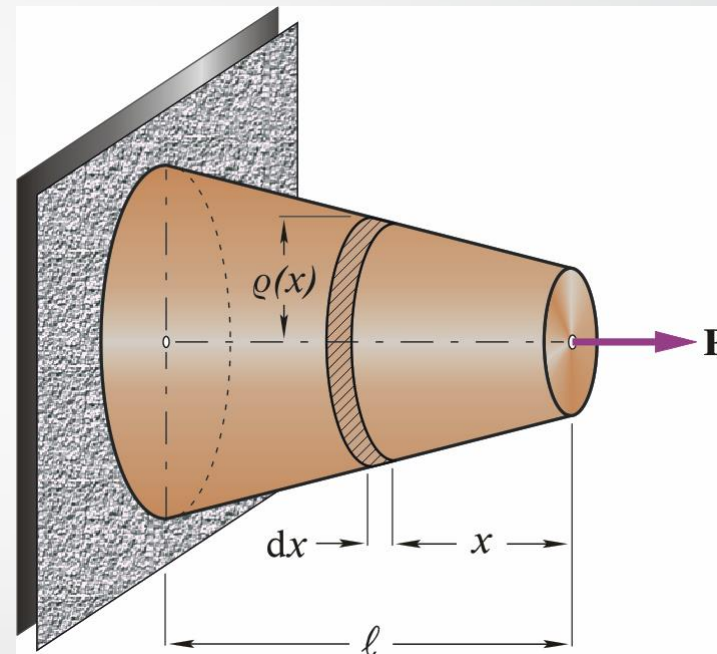
$$\rho(x) = r + \frac{(R - r)}{\ell} x$$

- Άρα το εμβαδόν της διατομής σε θέση x :

$$A(x) = \pi[\rho(x)]^2 = \pi \left[r + \frac{(R - r)}{\ell} x \right]^2$$

- Είναι:

$$d\rho = \frac{(R - r)}{\ell} dx$$



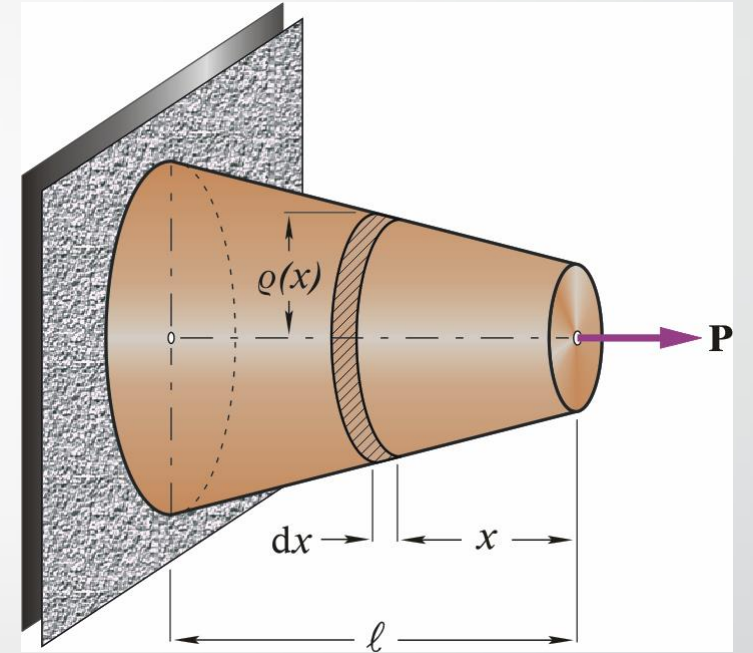
Άσκηση 5

- Είδαμε ότι:

$$\Delta L_P = \frac{P}{E} \int_0^\ell \frac{dx}{A(x)}$$

- Άρα:

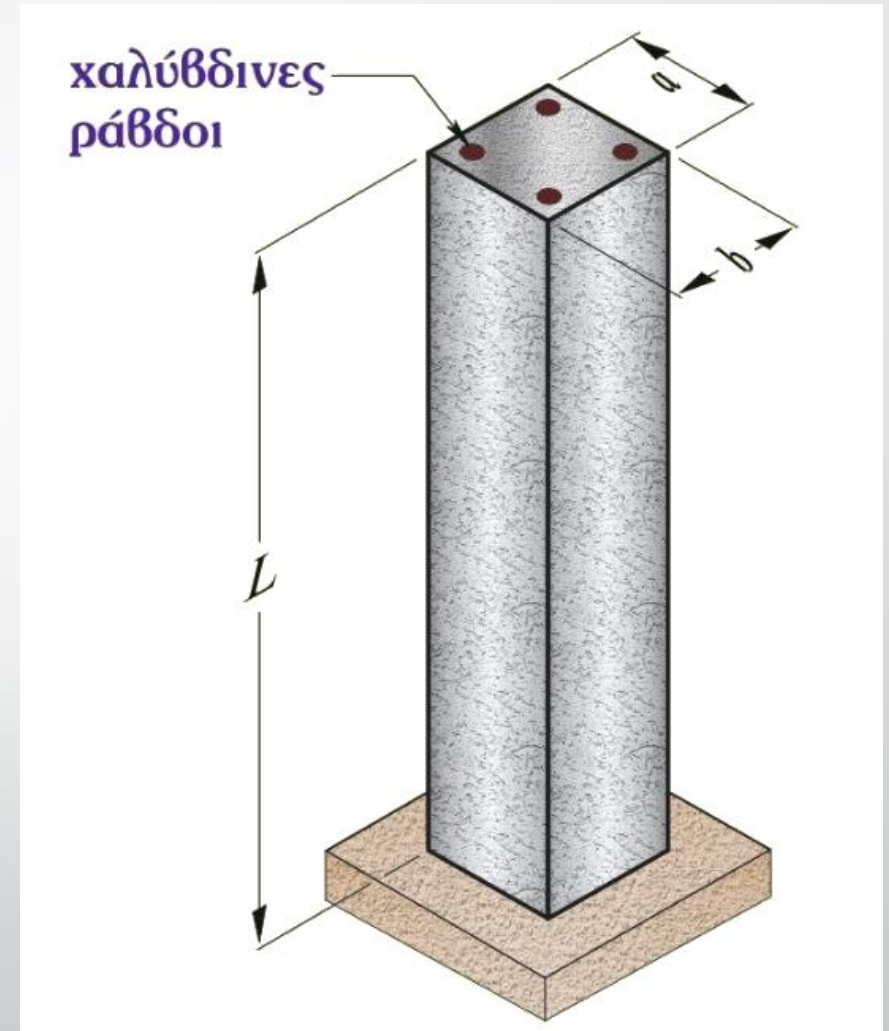
$$\begin{aligned} \Delta L_P &= \frac{P}{E} \int_0^\ell \frac{dx}{\pi \left[r + \frac{(R-r)}{\ell} x \right]^2} \\ &= \frac{P\ell}{E(R-r)\pi} \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^2} \\ &= \frac{P\ell}{E(R-r)\pi} \left[-\frac{1}{\rho} \right]_r^R \\ &= \frac{P\ell}{\pi E R r} = \frac{P\ell}{E \sqrt{A_R A_r}} \end{aligned}$$



- Άρα η συνολική επιμήκυνση του κόλουρου κώνου αντιστοιχεί σε πρισματική διατομή σταθερού εμβαδού $A = \sqrt{A_R A_r}$.

Άσκηση 6

- **Ομογενοποίηση ράβδων εν παραλλήλω:**
να βρείτε τα χαρακτηριστικά μιας
ισοδύναμης ράβδου που συμπεριφέρεται
όπως δύο ράβδοι με χαρακτηριστικά
(E_1, A_1), (E_2, A_2) συνδεδεμένες
παράλληλα.



Άσκηση 6

- Η ισοδύναμη ράβδος θα έχει εμβαδόν:

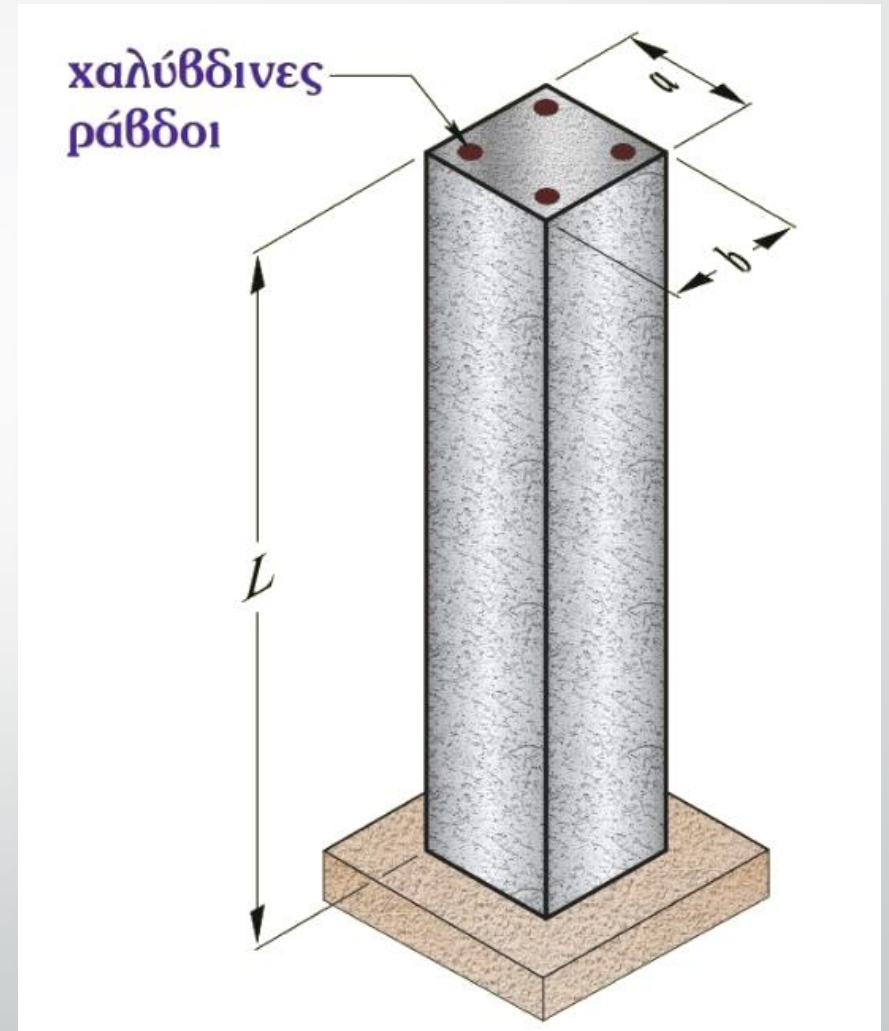
$$A = A_1 + A_2$$

- Για να βρούμε το μέτρο ελαστικότητας E , παρατηρούμε ότι αν επιβάλουμε αξονική δύναμη P , η παραμόρφωση θα είναι κοινή για τις δύο ράβδους:

$$\delta = \delta_1 = \delta_2$$
$$\frac{PL}{EA} = \frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$

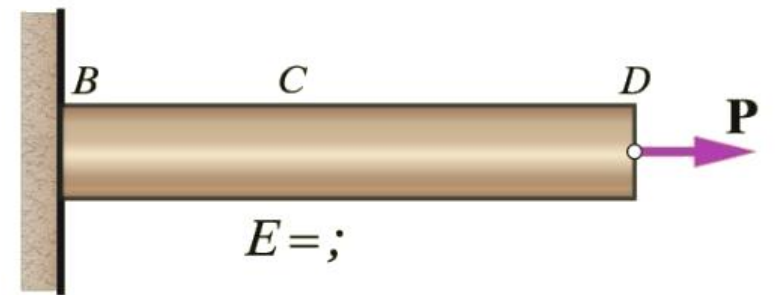
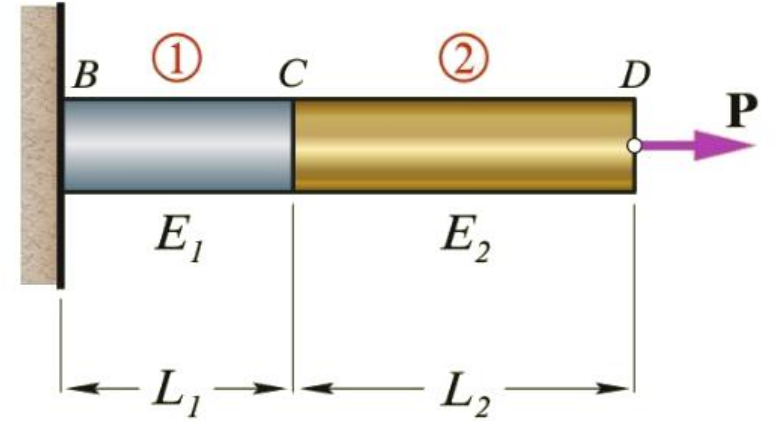
- Επιπλέον, $P = P_1 + P_2$.

- Προκύπτει: $E = \frac{A_1}{A} E_1 + \frac{A_2}{A} E_2$
(τύπος του Voght)



Άσκηση 7

- **Ομογενοποίηση ράβδων εν σειρά:** να βρείτε τα χαρακτηριστικά μιας ισοδύναμης ράβδου που συμπεριφέρεται όπως δύο ράβδοι με χαρακτηριστικά (E_1, L_1) , (E_2, L_2) , ίσου εμβαδού A , συνδεδεμένες σε σειρά.



Άσκηση 7

- Για να βρούμε το μέτρο ελαστικότητας E , παρατηρούμε ότι αν επιβάλουμε αξονική δύναμη P , αυτή θα επιβάλλεται αυτούσια σε κάθε μία ράβδο, και η συνολική επιμήκυνση θα είναι:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$
$$\frac{PL}{EA} = \frac{PL_1}{E_1A} + \frac{PL_2}{E_2A}$$

- Επιπλέον, $L = L_1 + L_2$.
- Προκύπτει: $E = \frac{E_1E_2(L_1+L_2)}{E_1L_1+E_2L_2}$
(τύπος του Reuss)

