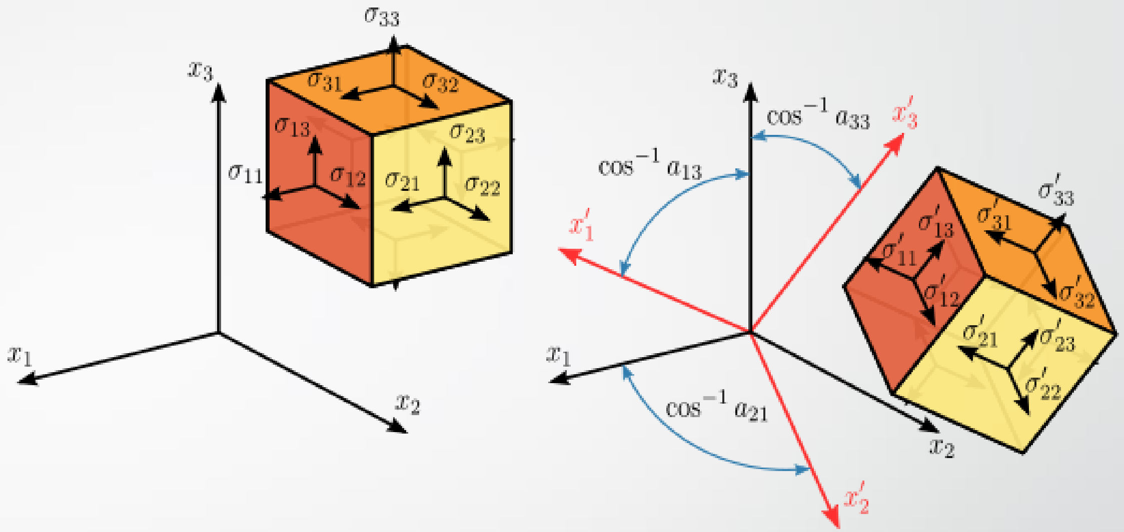
Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα



- *Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) ενός τανυστή β' τάξης (που μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν δισδιάστατο πίνακα) στην γενική περίπτωση της τριαξονικής έντασης γίνεται μέσω ενός* ***μητρώου μετασχηματισμού*** $\boldsymbol{\Lambda_s}$*:*

$$\Lambda_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

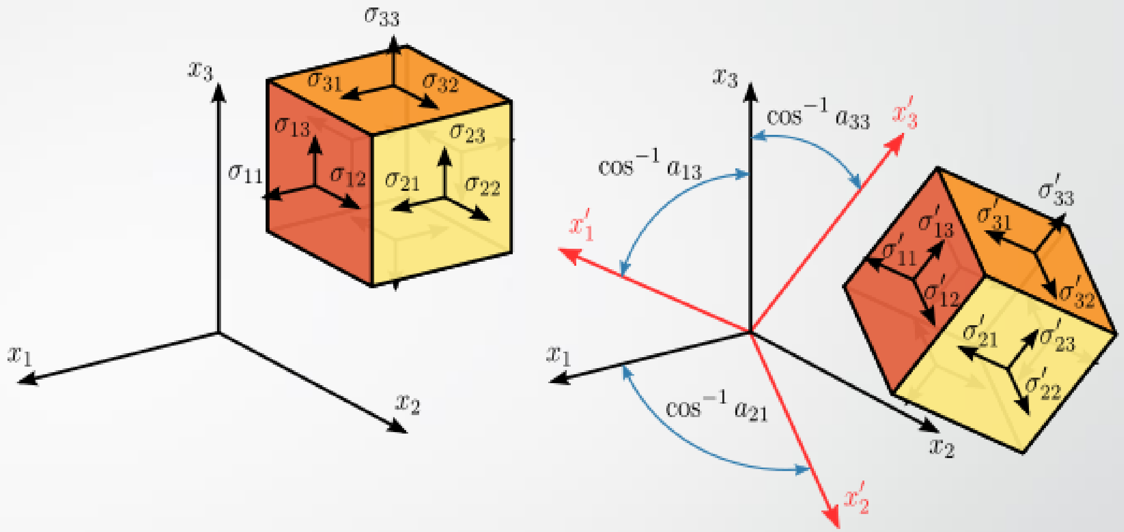
- *όπου* a_{ij} *τα* ***συνημίτονα κατεύθυνσης****, δηλαδή* $a_{ij} = \cos(\varphi_{ij})$.

- *Τότε αν* $\Lambda_s{}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ *(ανάστροφος), αποδεικνύεται ότι*

$\Lambda_s \Lambda_s{}^T = \Lambda_s{}^T \Lambda_s = \mathrm{I}$*, δηλαδή ο ανάστροφος πίνακας είναι και αντίστροφος.*

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Ο μετασχηματισμός γίνεται ως εξής:*

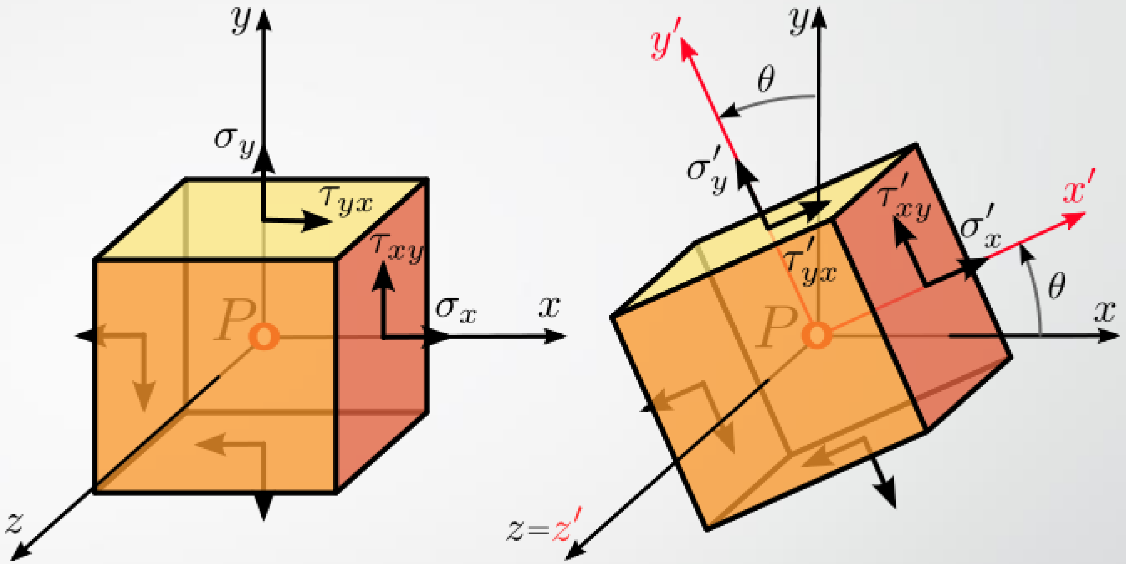


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- $[\sigma'] = \Lambda_s[\sigma]{\Lambda_s}^T$ *(από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).*
- $[\sigma] = {\Lambda_s}^T[\sigma']\Lambda_s$ *(από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).*
- *Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) ενός τανυστή α' τάξης (διάνυσμα) γίνεται ως εξής:*
- $\{v'\} = \Lambda_s\{v\}$ *(από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).*
- $\{v\} = {\Lambda_s}^T\{v'\}$ *(από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).*

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Αντίστοιχος μετασχηματισμός μπορεί να γίνει και στην περίπτωση επίπεδης έντασης, έστω στο επίπεδο xy. Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, την γωνία θ.*



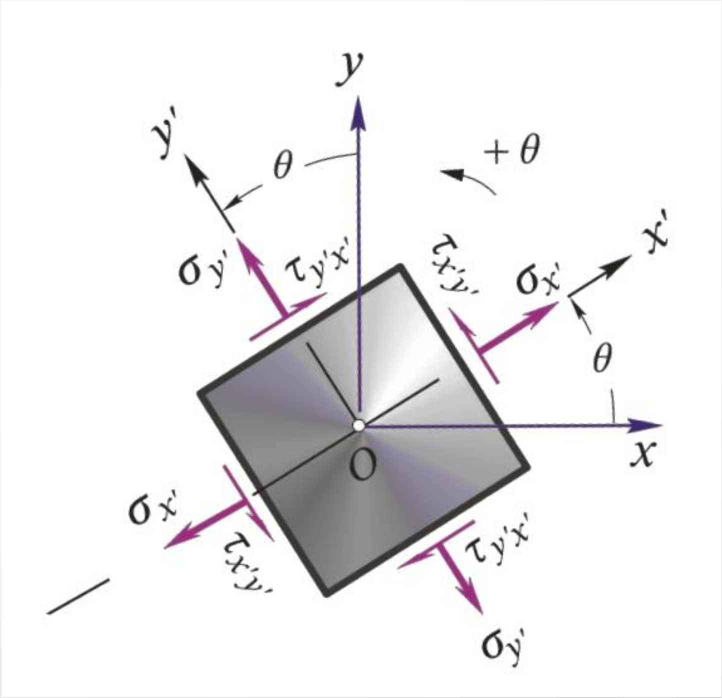
- *Σχηματίζουμε το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού στο επίπεδο Λ_p:*

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

- *Τότε ο μετασχηματισμός του τανυστή των τάσεων $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ γίνεται όπως προηγουμένως.*

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Αναλύοντας τις σχέσεις για το επίπεδο, προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τάσεις σ_x, σ_y, τ_{xy} σε κάποιο σύστημα αξόνων Oxy, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τάσεις $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$ σε κάποιο στραμμένο κατά γωνία ϑ σύστημα Ox'y', (η γωνία ϑ θετική Α.Δ.Ω. όπως στο σχήμα).*



- *Οι σχέσεις που δίνουν τις $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$ είναι:*
  - $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$
  - $\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$
  - $\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$
- Παρατηρείστε ότι $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}$.

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

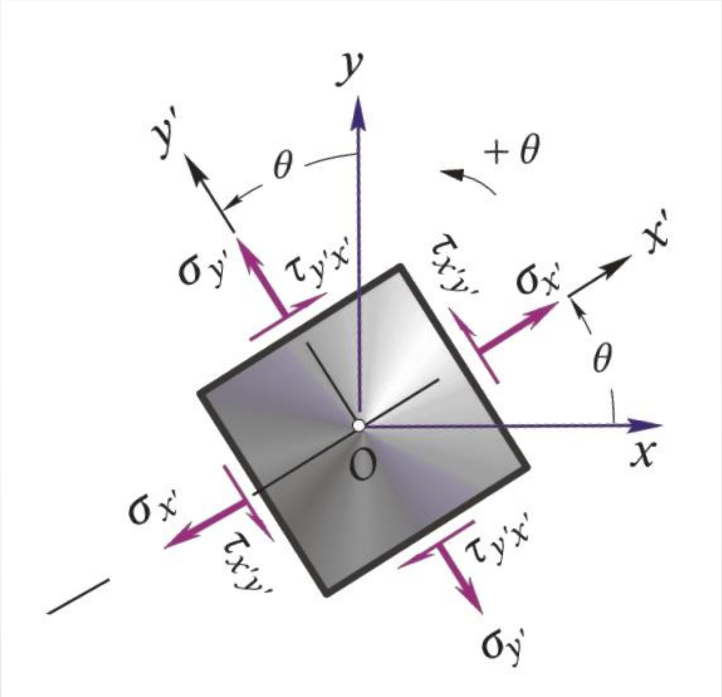
- *Με βάση την τρίτη σχέση μετασχηματισμού, που δίνει τις νέες διατμητικές τάσεις:*

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

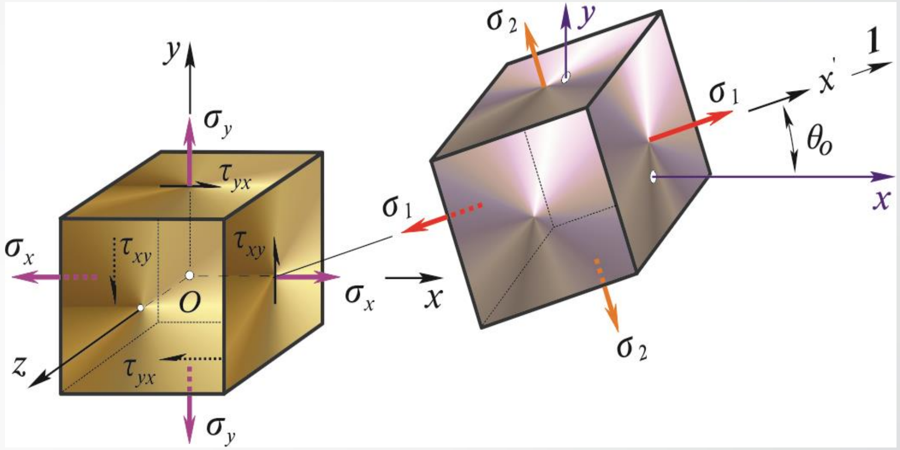
- *προκύπτει ότι υπάρχει μια ειδική τιμή της γωνίας θ, έστω γωνία θ_0, για την οποία η διατμητική τάση $\tau_{x'y'}$ στο νέο σύστημα μηδενίζεται. Λύνω ως προς θ_0:*

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right), -45° \leq \theta_0 \leq 45°$$

- *Θα ονομάσουμε **κύριο άξονα 1**, αυτόν για τον οποίο μηδενίζονται οι διατμητικές τάσεις και βρίσκεται πλησιέστερα στον «ισχυρότερο» εκ των αξόνων x, y. Ο **κύριος άξονας 2** θα είναι κάθετος στον άξονα 1.*



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα



- *Οι άξονες 1 και 2 ονομάζονται* ***κύριοι άξονες***.
- *Τα επίπεδα τα κάθετα στους άξονες 1 και 2 ονομάζονται* ***κύρια επίπεδα***.
- *Οι τάσεις σ_1, σ_2 που αντιστοιχούν στους κύριους άξονες ονομάζονται* ***κύριες τάσεις.***
- *Αντικαθιστώντας την γωνία θ_0 στις σχέσεις μετασχηματισμού προκύπτει:*
- $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$
- $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \tau_{max}$

Με $\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

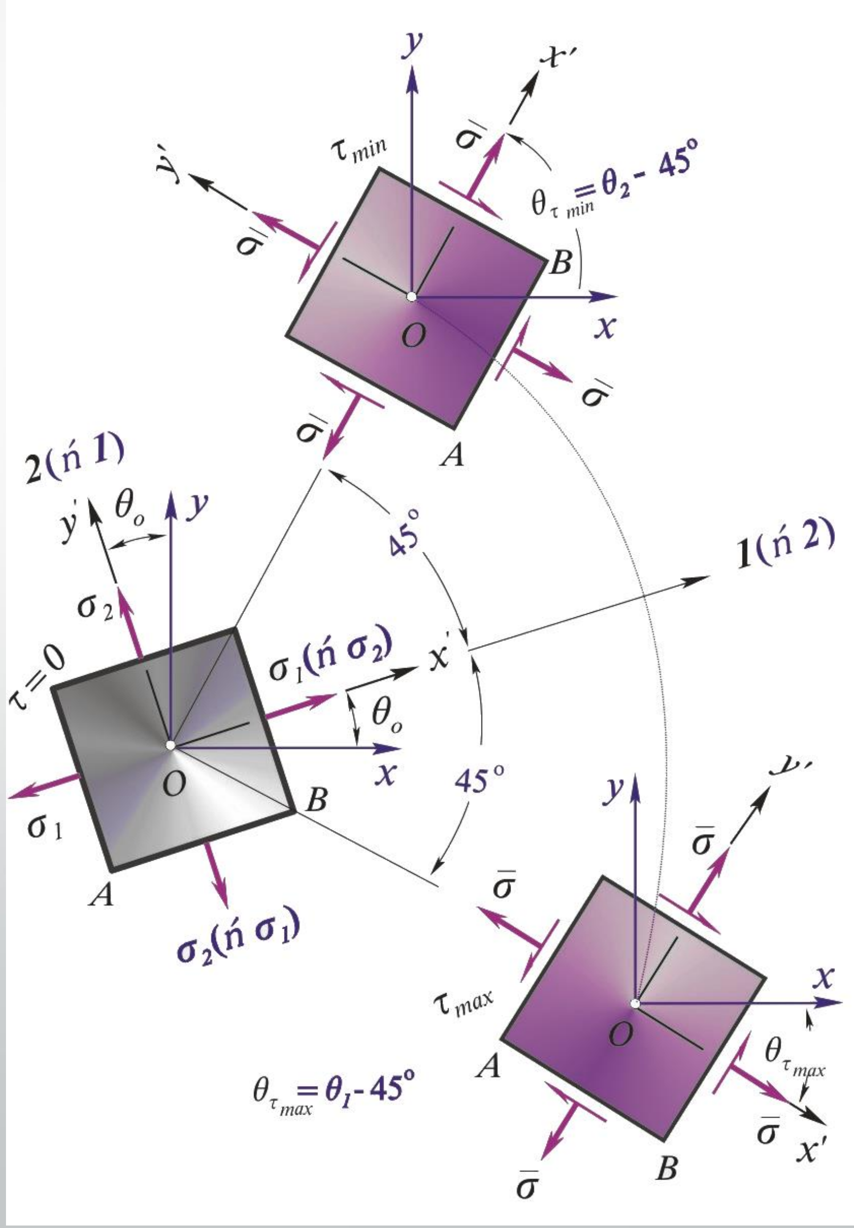
Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Παραγωγίζοντας την σχέση που δίνει τις νέες διατμητικές τάσεις στο στραμμένο σύστημα και θέτοντας τις παραγώγους ίσες με το μηδέν προκύπτει ότι η ελάχιστη και η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζονται σε διευθύνσεις* $-45°$ *και* $+45°$ *σε σχέση με τους κύριους άξονες (δηλαδή τους* ***διχοτομούν****). Εκεί:*

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- *Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων που εμφανίζονται τα ακρότατα στην* $\tau_{x'y'}$ *θα είναι*

$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Παρατηρούμε ότι* $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$*. Αυτό συμβαίνει γενικά,* ***διότι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του τανυστή παραμένει αναλλοίωτο*** *(σταθερό) κατά την περιστροφή καθ' οποιονδήποτε τρόπο.*

- *Γενικά υπάρχουν τρεις αναλλοίωτες του τανυστή:* $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

1. ***Ίχνος (trace)*** *ή* ***άθροισμα των ορθών τάσεων****:* $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$
2. ***Άθροισμα ελασσόνων οριζουσών****:*

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

3. ***Ορίζουσα του τανυστή****:* $J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Οι τρεις αναλλοίωτες του τανυστή παραμένουν φυσικά οι ίδιες και στο κύριο σύστημα, όπου ο τανυστής διαγωνιοποιείται και παίρνει την μορφή:*

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- *Έτσι:*
  - $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \boldsymbol{\sigma_1} + \boldsymbol{\sigma_2} + \boldsymbol{\sigma_3}$.
  - $J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \boldsymbol{\sigma_2\sigma_3} + \boldsymbol{\sigma_1\sigma_3} + \boldsymbol{\sigma_1\sigma_2}$.
  - $J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Γενικότερα, **οι κύριες τάσεις δεν είναι παρά οι ιδιοτιμές του τανυστή των τάσεων**. Ο τανυστής των τάσεων διαγωνιοποιείται, και σύμφωνα με την Γραμμική Άλγεβρα οι ιδιοτιμές προκύπτουν από την **χαρακτηριστική εξίσωση:***

$$\left|\boldsymbol{\sigma_{ij}} - \boldsymbol{\sigma_k}\mathbf{I}\right| = \mathbf{0} \quad (\mathbf{1})$$

- *όπου,* $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ *ο τανυστής,* I *ο μοναδιαίος* 3×3 *και* σ_k *οι άγνωστες ιδιοτιμές (*$k = 1,2,3$*).*

- *Αναλύοντας την (1):* $\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_k) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_k) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_k) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$(\boldsymbol{\sigma_k})^3 - \boldsymbol{J_1}(\boldsymbol{\sigma_k})^2 + \boldsymbol{J_2}\boldsymbol{\sigma_k} - \boldsymbol{J_3} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{2})$$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Λύνοντας την (2) $(\sigma_k)^3 - J_1(\sigma_k)^2 + J_2\sigma_k - J_3 = 0$ *προκύπτουν οι ιδιοτιμές (δηλαδή οι κύριες τάσεις* σ_1, σ_2, σ_3*).*
- ***Για κάθε ιδιοτιμή*** $\boldsymbol{\sigma_k}$ *μπορεί να υπολογιστεί το αντίστοιχο* ***ιδιοδιάνυσμα*** $\boldsymbol{n}$ *από την σχέση:*

$$(\sigma_{ij} - \sigma_k \mathrm{I})n = 0$$

- *Τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται και* ***κατευθύνοντα συνημίτονα*** *των γωνιών που σχηματίζουν οι στραμμένοι άξονες με τους αρχικούς.*
- *Επειδή μας ενδιαφέρει η διεύθυνσή τους, συνήθως κανονικοποιούνται ώστε να έχουν μέτρο (μήκος) μονάδα:*

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

- *Επειδή είναι κατευθύνοντα συνημίτονα γωνιών, αν τα βάλουμε (όλα) σε έναν πίνακα τότε προκύπτει το μητρώο μετασχηματισμού* Λ_s *που μας μεταφέρει από το* ***τρέχον σύστημα*** *στο* ***κύριο σύστημα****.*

Ασκήσεις

Κύριες τιμές και διευθύνσεις συμμετρικού τανυστή

Άσκηση 1

- *Δίνεται ο παρακάτω συμμετρικός τανυστής β' τάξης*

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

- *Ζητείται να βρείτε τις αναλλοίωτες, τις κύριες τιμές και τις κύριες διευθύνσεις του.*

Άσκηση 1

- Οι αναλλοίωτες υπολογίζονται ως

$$J_1 = 2 + 3 - 3 = 2$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 25 - 6 = -25$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-9 - 16) = -50$$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται και παραγοντοποιείται ως

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 25) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -5$$

Άσκηση 1

- Ξεκινώντας με την πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 = 5$, αντικαθιστώ στην $(a - \lambda I)n = 0$ για να βρω το πρώτο ιδιοδιάνυσμα και προκύπτει το εξής σύστημα:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 0 & 3-5 & 4 \\ 0 & 4 & -3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} -3n_1^{(1)} = 0 \\ -2n_2^{(1)} + 4n_3^{(1)} = 0 \\ 4n_2^{(1)} - 8n_3^{(1)} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} - 2n_3^{(1)} = 0 \end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 1

- Θεωρώντας ως $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα βάσης, από το αόριστο σύστημα που προέκυψε:

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{n}_1^{(1)} = 0 \\ \mathrm{n}_2^{(1)} - 2\mathrm{n}_3^{(1)} = 0 \end{Bmatrix}$$

- Επιλέγω π.χ. $\mathrm{n}_3^{(1)} = 1$, οπότε $\mathrm{n}_2^{(1)} = 2$ ενώ $\mathrm{n}_1^{(1)} = 0$. Ένα διάνυσμα θα είναι λοιπόν το $0\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$ με μέτρο $\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Το διάνυσμα αυτό κανονικοποιείται, ώστε να γίνει μοναδιαίο, οπότε προκύπτει ότι η πρώτη κύρια διεύθυνση ορίζεται από το

$$\mathbf{n}^{(1)} = \pm\frac{(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)}{\sqrt{5}}$$

- Με αντίστοιχη διαδικασία προκύπτει $\mathbf{n}^{(2)} = \pm\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{n}^{(3)} = \pm\frac{(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)}{\sqrt{5}}$.

Άσκηση 1

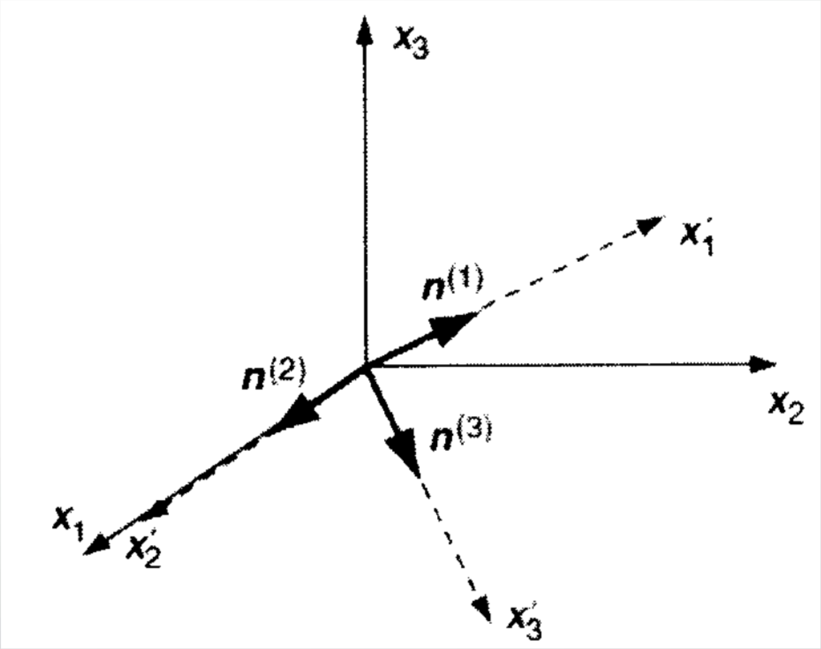
- Τα τρία ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{n}^{(1)} = \pm \frac{(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{n}^{(2)} = \pm \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{n}^{(3)} = \pm \frac{(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)}{\sqrt{5}}$$

- είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους.



Άσκηση 1

- Με βάση τα τρία ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{n}^{(1)} = \pm\frac{(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{n}^{(2)} = \pm\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{n}^{(3)} = \pm\frac{(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)}{\sqrt{5}}$$

- μορφώνουμε το μητρώο μετασχηματισμού

$$[\Lambda_s] = \begin{bmatrix} 0 & {}^{2}/_{\sqrt{5}} & {}^{1}/_{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{\sqrt{5}} & -{}^{2}/_{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1

- Οπότε ο τανυστής α στο κύριο σύστημα παίρνει την μορφή

$$[a'] = [\Lambda_s][a][\Lambda_s^T]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- Το οποίο είναι ένα διαγώνιο μητρώο με στοιχεία τις ιδιοτιμές.