

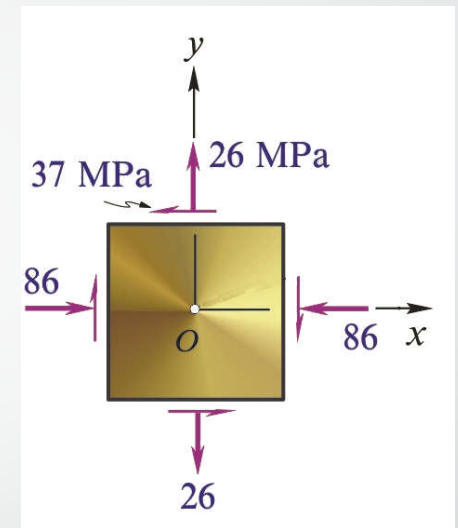


Ασκήσεις

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα – κύκλος του Mohr

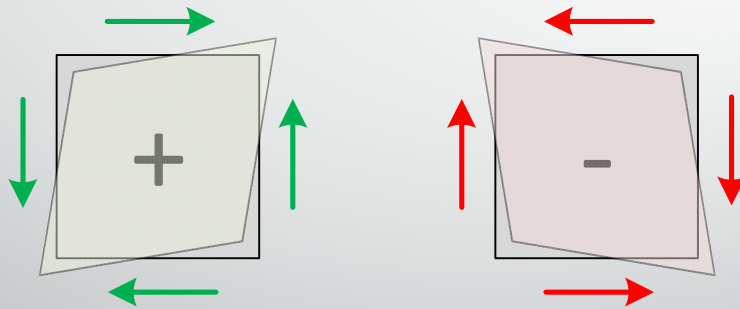
Άσκηση 1

- Στο στοιχείο του σχήματος ζητούνται οι κύριες τάσεις, οι διευθύνσεις των κύριων επιπέδων καθώς και η ακρότατη διατμητική τάση.

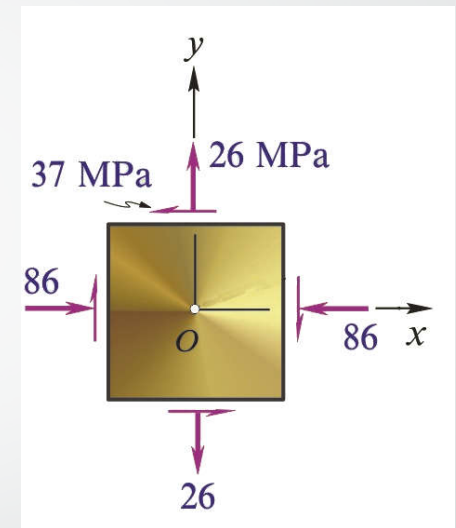


Άσκηση 1

- Οι ορθές τάσεις είναι θετικές όταν είναι εφελκυστικές, και αρνητικές όταν είναι θλιπτικές.
- Συνεπώς, $\sigma_x = -86\text{MPa}$, $\sigma_y = +26\text{MPa}$.
- Υπενθυμίζουμε την προσήμανση των διατμητικών τάσεων στο επίπεδο:

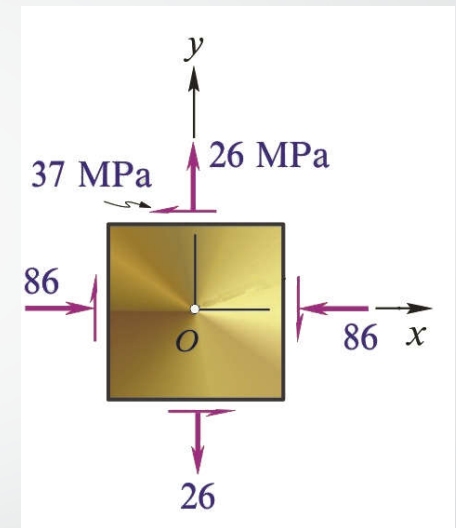


- Συνεπώς, $\tau_{xy} = -37\text{MPa}$.



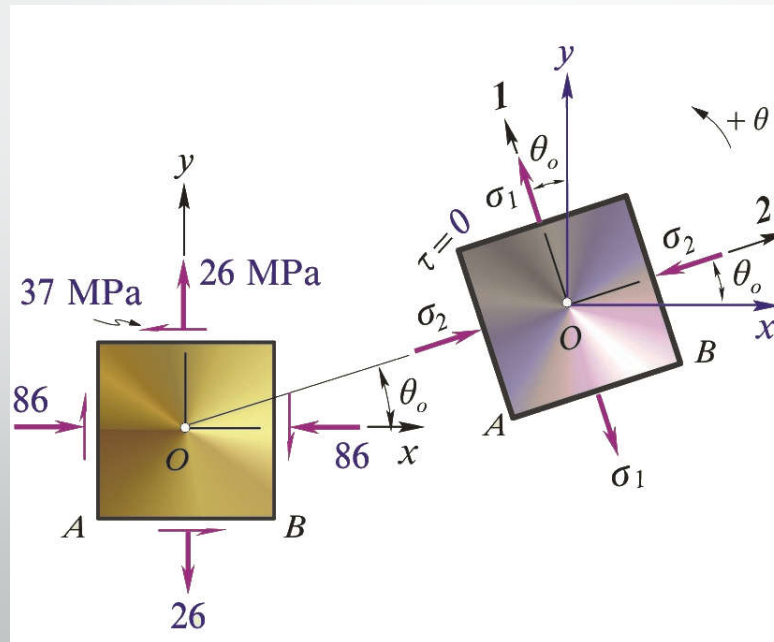
Άσκηση 1

- $$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \frac{(-86) + 26}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-86) - 26}{2}\right)^2 + (-37)^2} \Rightarrow$$
- $\sigma_1 = \sigma_{max} = 37.12 MPa, \sigma_2 = \sigma_{min} = -97.12 MPa$
- $$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{(-86) - 26}{2}\right)^2 + (-37)^2} = 67.12 MPa$$
- Εναλλακτικά $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 67.12 MPa$
- $\tau_{min} = -\tau_{max} = -67.12 MPa$

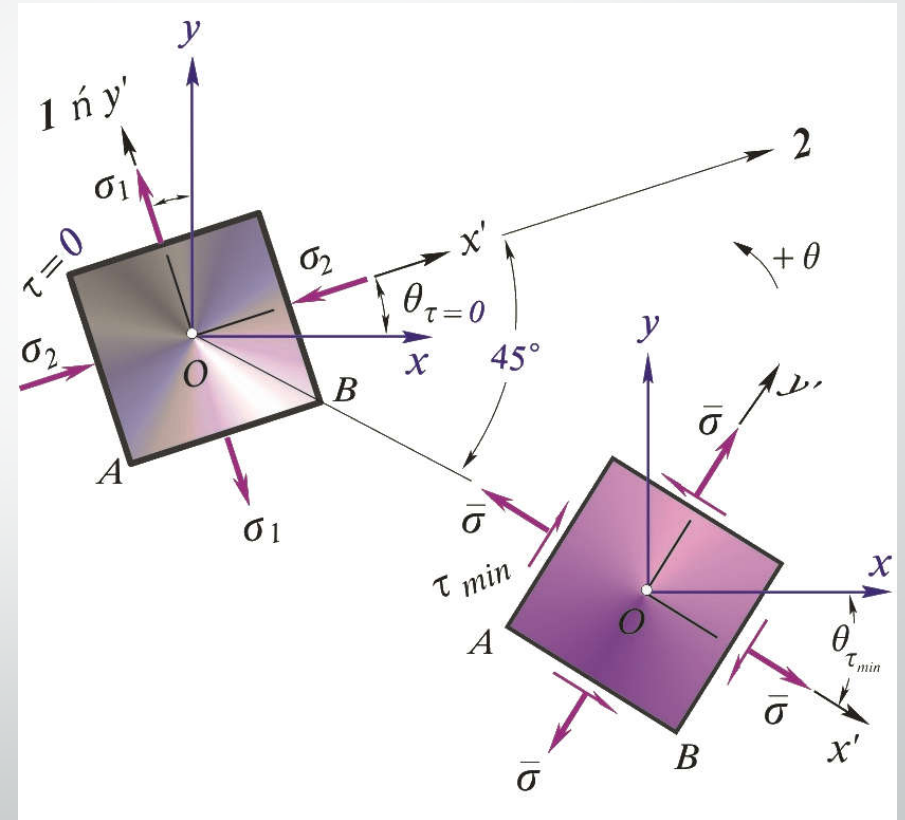
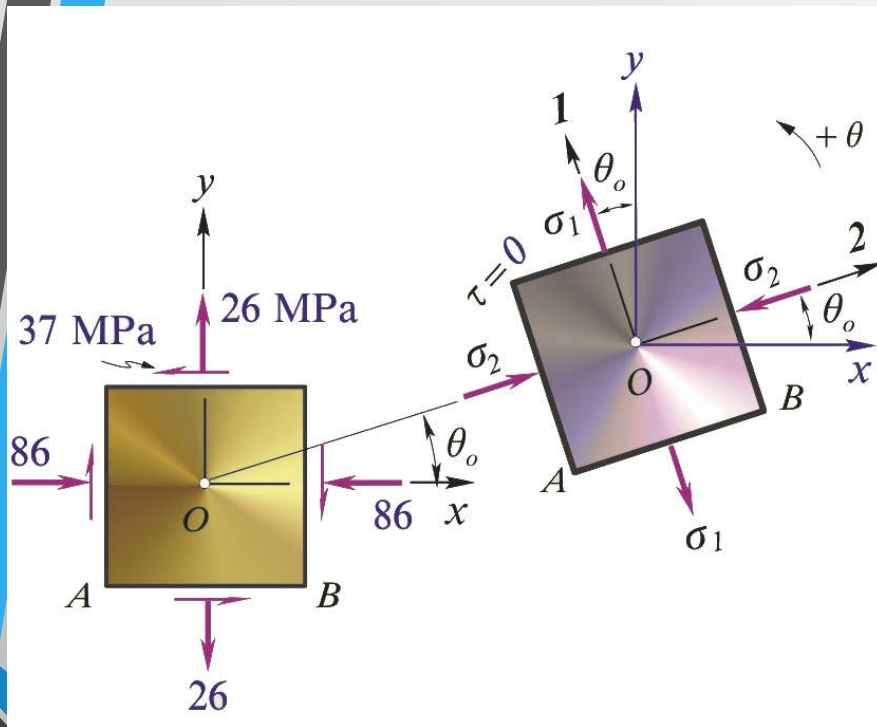


Άσκηση 1

- $\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2(-37)}{(-86) - 26} \right) \cong 16.73^\circ, -45^\circ \leq \theta_0 \leq 45^\circ$
- Ο κύριος άξονας 1 θα σχηματίζει γωνία 16.73° Α.Δ.Ω. με τον «ισχυρότερο» εκ των x, y . Είναι $\sigma_y > \sigma_x$ οπότε ο κοντινότερος άξονας στον y θα είναι ο 1, και στον x ο 2. Συνεπώς: $\theta_2 = \theta_0 = 16.73^\circ, \theta_1 = 90^\circ + \theta_0 = 106.73^\circ$.

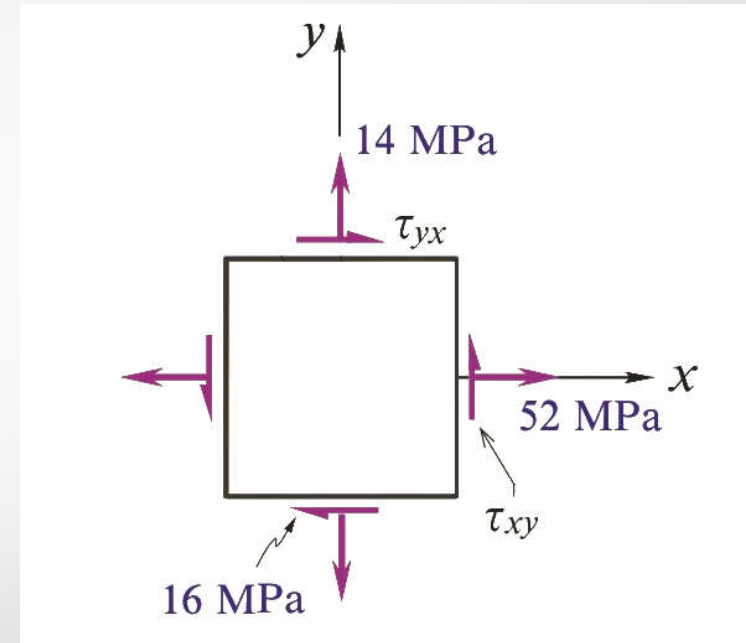


Άσκηση 1



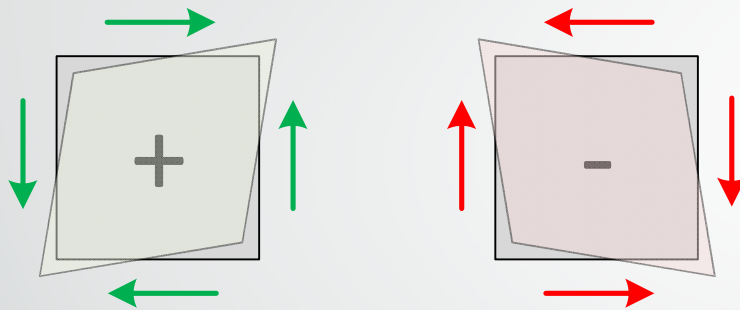
Άσκηση 2

- Στο στοιχείο του σχήματος ζητούνται οι κύριες τάσεις, οι διευθύνσεις των κύριων επιπέδων, οι εκεί ορθές τάσεις, καθώς και όλες τάσεις για περιστροφή του Oxy κατά 40° ΣΔΩ.
- Να δοθούν οι λύσεις τόσο αναλυτικά όσο και γραφικά με χρήση του κύκλου του Mohr.

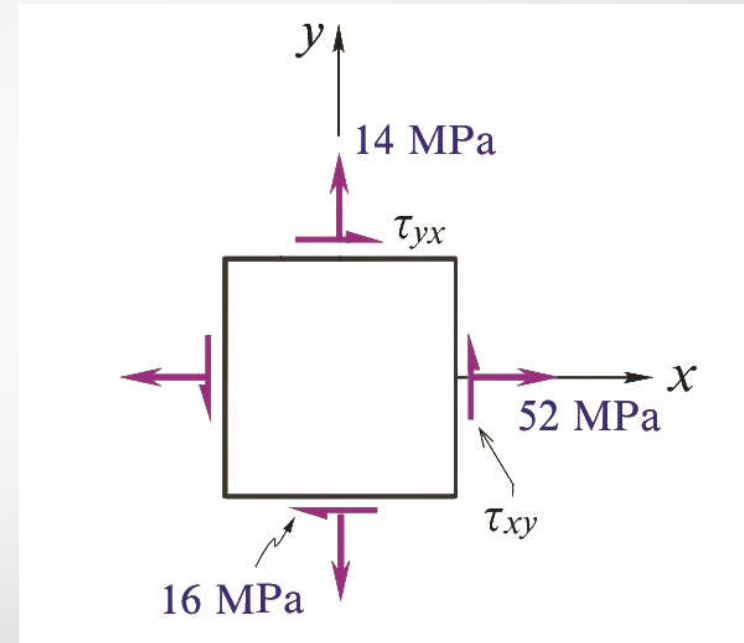


Άσκηση 2

- $\sigma_x = +52\text{MPa}$, $\sigma_y = +14\text{MPa}$,
 $\tau_{xy} = +16\text{MPa}$.

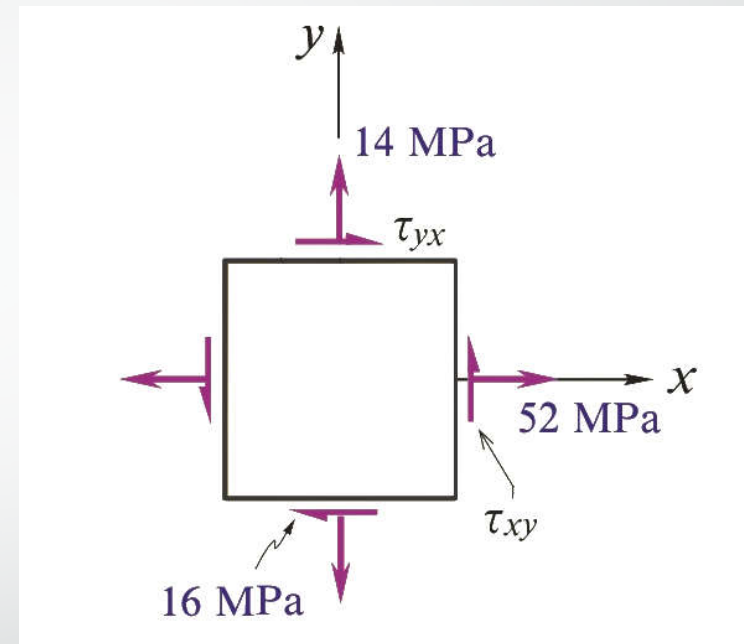


- $$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \frac{52 + 14}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{52 - 14}{2}\right)^2 + 16^2} \Rightarrow$$
- $\sigma_1 = \sigma_{max} = 57.84\text{MPa}$,
 $\sigma_2 = \sigma_{min} = 8.16\text{MPa}$



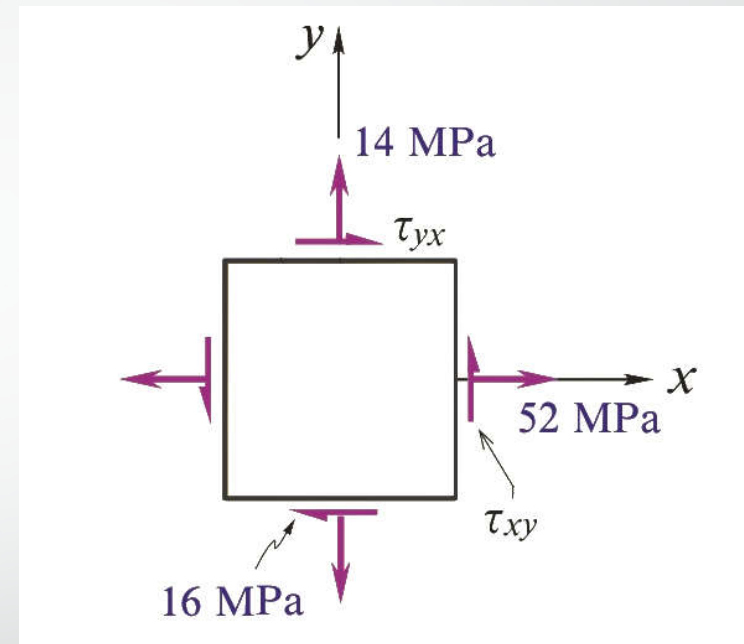
Άσκηση 2

- $\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
 $= \sqrt{\left(\frac{52 - 14}{2}\right)^2 + 16^2} = 24.84 \text{ MPa}$
- Εναλλακτικά $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 24.84 \text{ MPa}$
- $\tau_{min} = -\tau_{max} = -24.84 \text{ MPa}$
- Στα επίπεδα μέγιστης/ελάχιστης διατμητικής ($-45^\circ / +45^\circ$ ΣΔΩ από τον κύριο άξονα 1), οι ορθές τάσεις είναι:
 $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 33 \text{ MPa}.$



Άσκηση 2

- $$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{52 + 14}{2} + \frac{52 - 14}{2} \cos(-80^\circ) + 16 \sin(-80^\circ) \\ &= 20.54 \text{ MPa}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{52 + 14}{2} - \frac{52 - 14}{2} \cos(-80^\circ) - 16 \sin(-80^\circ) \\ &= 45.46 \text{ MPa}.\end{aligned}$$
- Εναλλακτικά, $\sigma_{y'} = (\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_{x'}$
- $$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\frac{52 - 14}{2} \sin(-80^\circ) + 16 \cos(-80^\circ) \\ &= 21.49 \text{ MPa}.\end{aligned}$$



Άσκηση 2

- Επιλέγουμε κλίμακα, έστω $1\text{cm} \rightarrow 10\text{MPa}$.
- $\sigma_x = +52\text{MPa}$, $\sigma_y = +14\text{MPa}$,
 $\tau_{xy} = +16\text{MPa}$.
- $K(\bar{\sigma}, 0)$, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 33\text{MPa}$.
- $\sigma_1 = \sigma_{max} = 57.84\text{MPa}$, $\sigma_2 = \sigma_{min} = 8.16\text{MPa}$, $\tau_{max} = 24.84\text{MPa}$
- $\sigma_{x'} = 20.54\text{MPa}$, $\sigma_{y'} = 45.46\text{MPa}$,
 $\tau_{x'y'} = 21.49\text{MPa}$.

