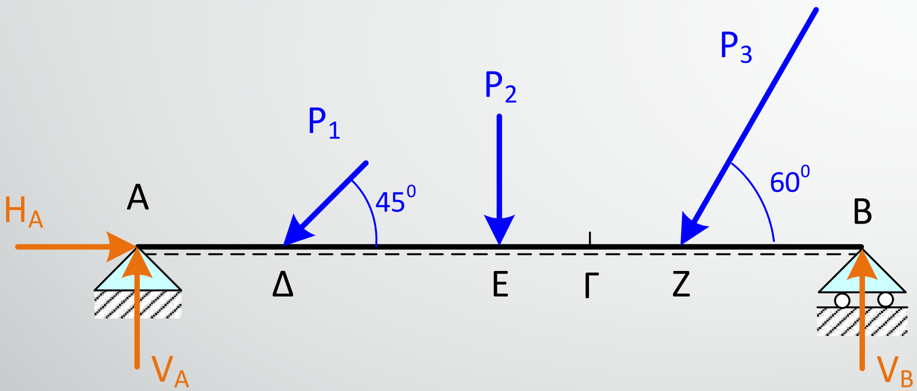
Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων

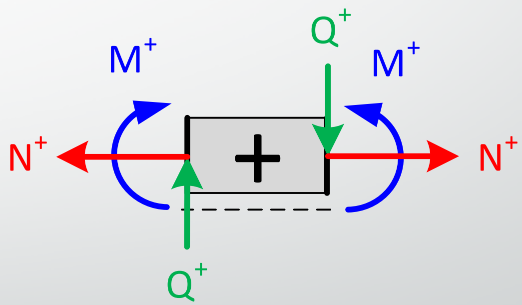
(M, Q, N)

Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (MQN)

- *Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε ότι:*

$$\mathrm{N}_{\Gamma} = -20\ kN$$
$$Q_{\Gamma} = -0.254\ kN$$
$$\mathrm{M}_{\Gamma} = +35.022\ kNm$$



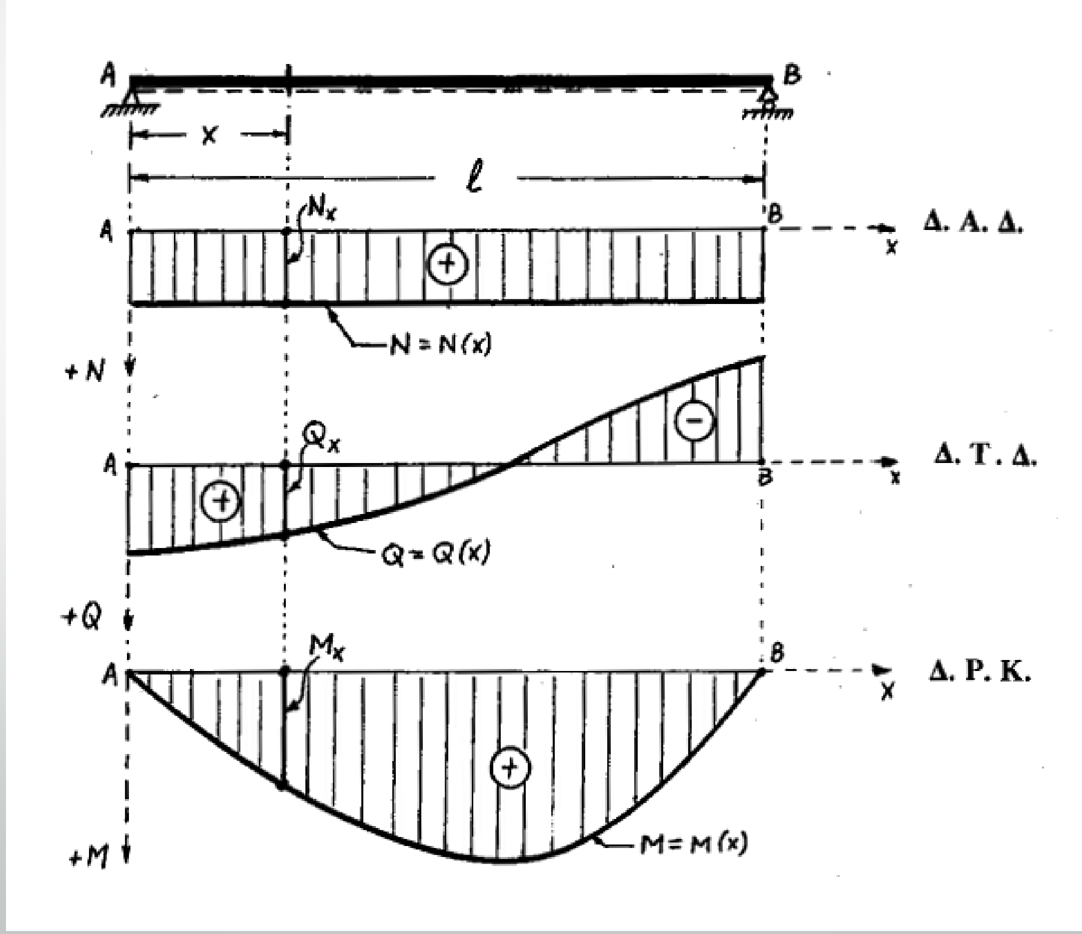


- *Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν το σημείο Γ **μόνο**. **Θα θέλαμε όμως την ίδια πληροφορία για όλα τα σημεία του φορέα**. Για αυτόν τον σκοπό φτιάχνουμε **διαγράμματα εσωτερικών δυνάμεων**.*

Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (MQN)

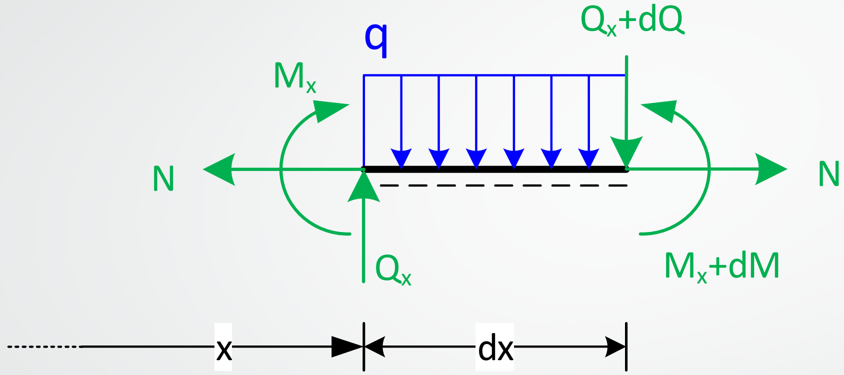
- *Κατασκευάζουμε 3 διαγράμματα (για 2D προβλήματα):*
- ***1. Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων (N)***
- ***2. Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (Q)***
- ***3. Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών** ή **Διάγραμμα Ροπών Κάμψης (M)**.*

(για κάποια απροσδιόριστη φόρτιση)



Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (MQN)

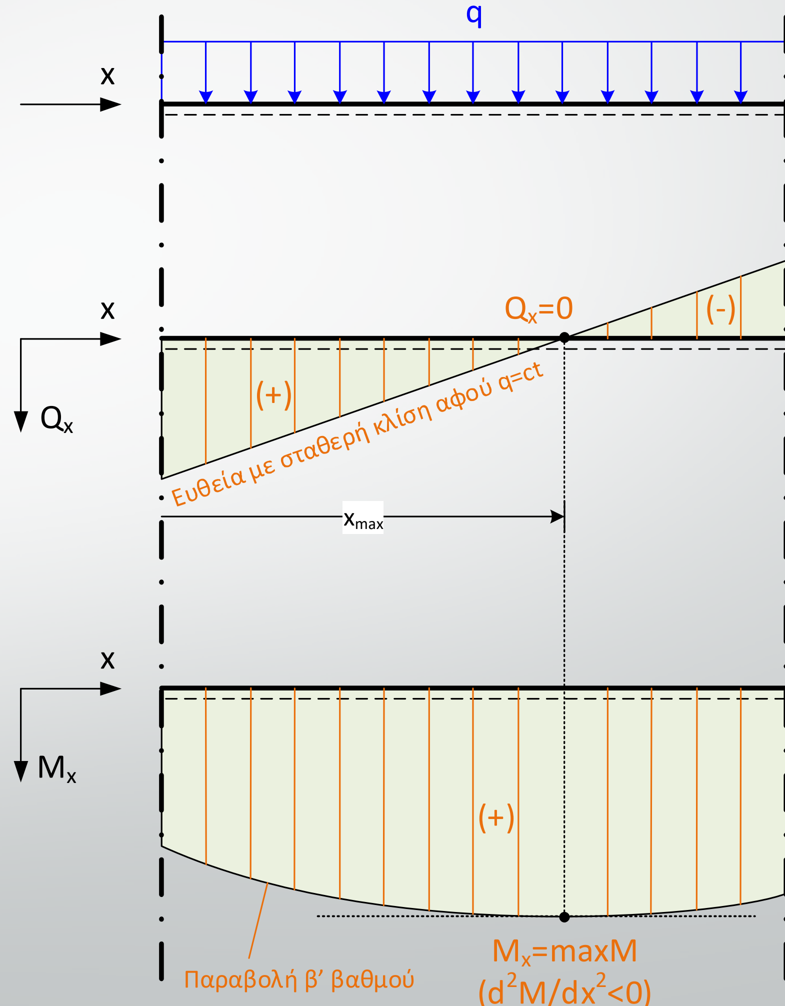
- *Σχέση μεταξύ εσωτερικών δυνάμεων:*



- *Από* $\sum F_y = 0$ *προκύπτει:* $Q_x - q\ dx - (Q_x + dQ) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{dQ/dx = -q}$
  (η q(x) θεωρήθηκε ότι έχει σταθερή τιμή q κατά το μήκος dx).
- *Από* $\sum \mathrm{M} = 0$ *γύρω από την δεξιά άκρη:*
  $\mathrm{M}_x + Q_x dx - (q\ dx)\ dx/2 - (M_x + dM) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{dM/dx = Q_x}$
  (παραλείποντας απειροστά ανώτερης τάξης).

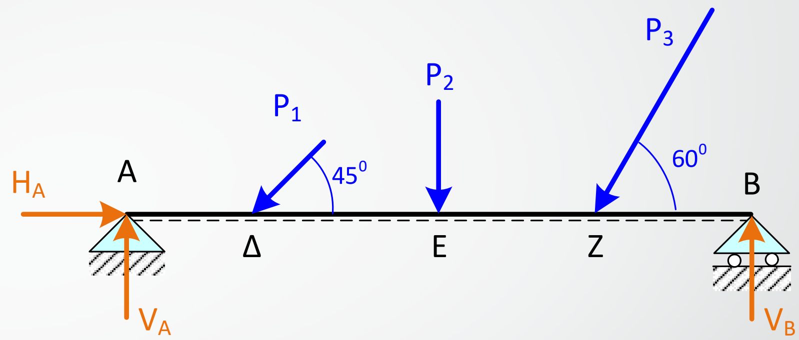
Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (ΜQN)

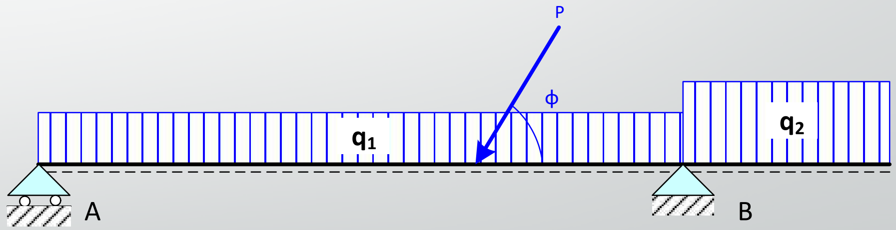
- *Συνολικά:* $\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$
- ***Τα διαγράμματα N, Q****, σχεδιάζονται από οποιαδήποτε πλευρά θέλουμε, αλλά* ***είναι πάντα προσημασμένα****. Συνήθως τα θετικά προς τα κάτω για οριζόντιες δοκούς.*
- *Τα διαγράμματα M σχεδιάζονται με* ***τα θετικά πάντα προς την πλευρά της θετικής ίνας****. Συνεπώς σχεδιάζονται πάντα από την πλευρά των εφελκυόμενων ινών λόγω κάμψης.*



Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (ΜQΝ)

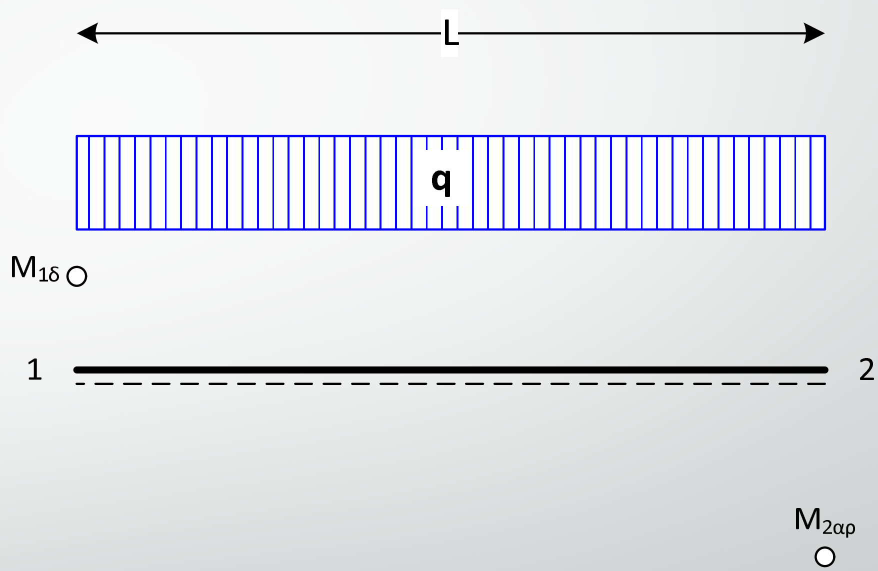
- *Είδαμε ότι:* $\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$
- *Αυτό σημαίνει ότι:*
  - *στις περιοχές που q(x)=o,* ***όπου δηλαδή δεν έχουμε κατανεμημένο φορτίο οποιουδήποτε είδους, αλλά ούτε και συγκεντρωμένες φορτίσεις****, η Q(x) θα είναι σταθερή συνάρτηση και η M(x) γραμμική συνάρτηση.*
  - *στις περιοχές που έχουμε* ***ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο*** *δηλαδή q(x)=ct (σταθερή μη μηδενική συνάρτηση), χωρίς ενδιάμεσες συγκεντρωμένες φορτίσεις, η Q(x) θα είναι γραμμική συνάρτηση και η M(x) δευτέρου βαθμού (με γραφική παράσταση παραβολή).*





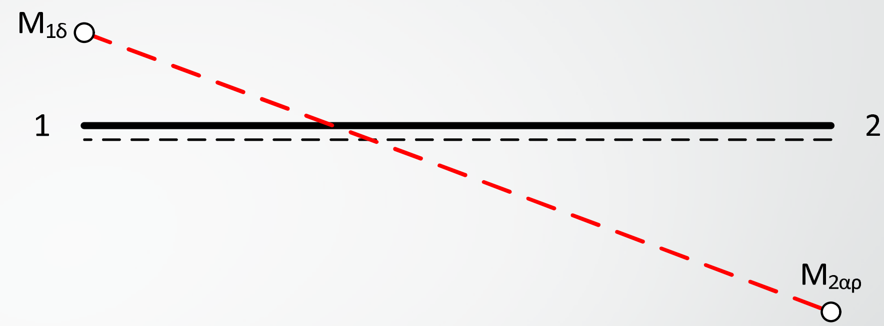
Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (MQN)

- ***Γραφική σχεδίαση διαγράμματος καμπτικών ροπών δοκού υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο (παραβολή β' βαθμού)***
- *Έστω ότι έχουμε τμήμα δοκού μήκους L, από τον κόμβο 1 ως τον κόμβο 2, το οποίο υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q. Δεν θα πρέπει ενδιάμεσα να υπάρχει άλλη φόρτιση (π.χ. συγκεντρωμένο φορτίο). Αν υπάρχει, εφαρμόζεται η σχεδίαση ξεχωριστά στα επιμέρους τμήματα.*
- *Έστω επίσης ότι έχουμε υπολογίσει τις ακραίες τιμές της καμπτικής ροπής, ήτοι τις $M_{1\delta}$ (λίγο δεξιά του κόμβου 1) και $M_{2\alpha\rho}$ (λίγο αριστερά του κόμβου 2).*

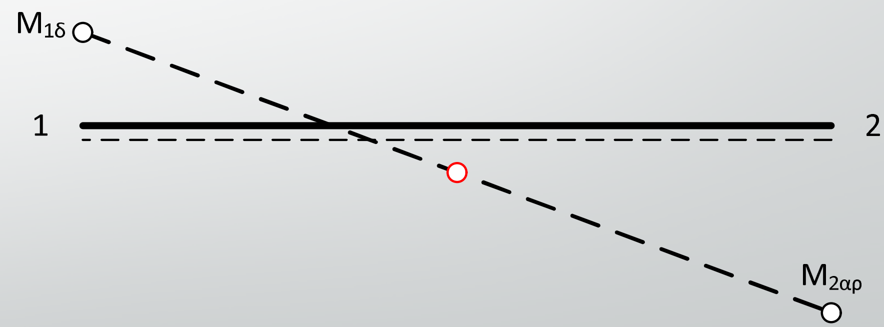


Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (MQN)

- *Ενώνουμε την $M_{1\delta}$ με την $M_{2\alpha\rho}$.*

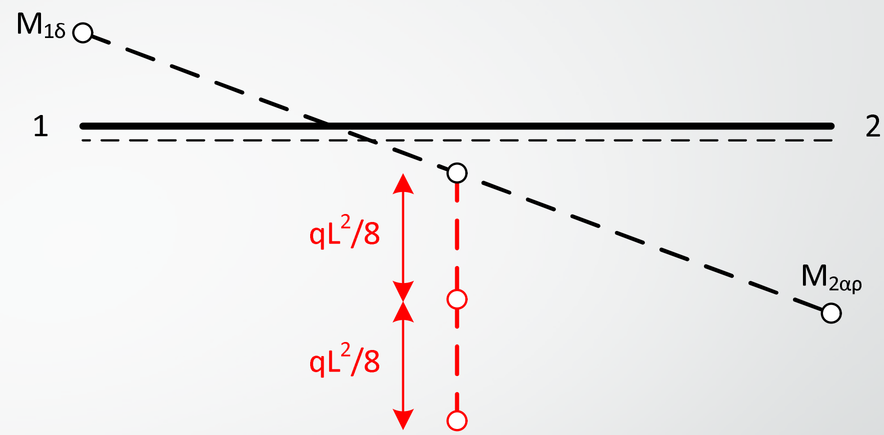


- *Βρίσκουμε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που σχεδιάσαμε.*

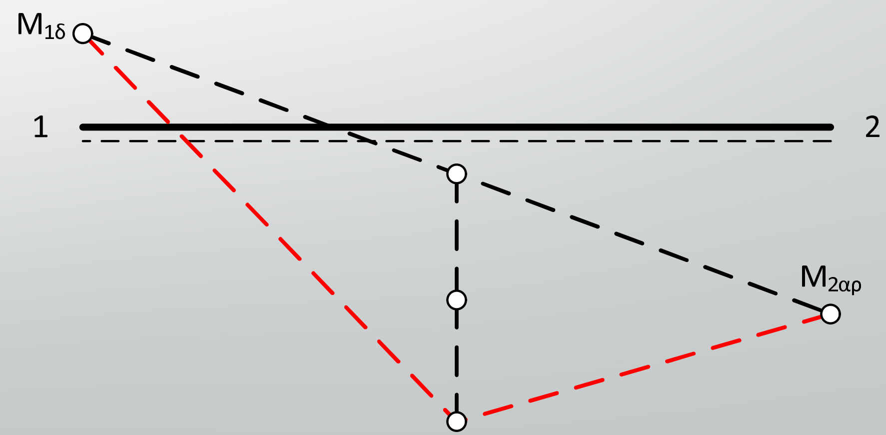


Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (ΜΩΝ)

- *Από αυτό το σημείο αναρτούμε* ***δύο φορές*** *με την κατεύθυνση του κατανεμημένου φορτίου (συνήθως από πάνω προς τα κάτω, αν πρόκειται για φορτία βαρύτητας) την ποσότητα* ***qL²/8*** *(με κατάλληλη κλίμακα, αφού έχει διαστάσεις καμπτικής ροπής):*

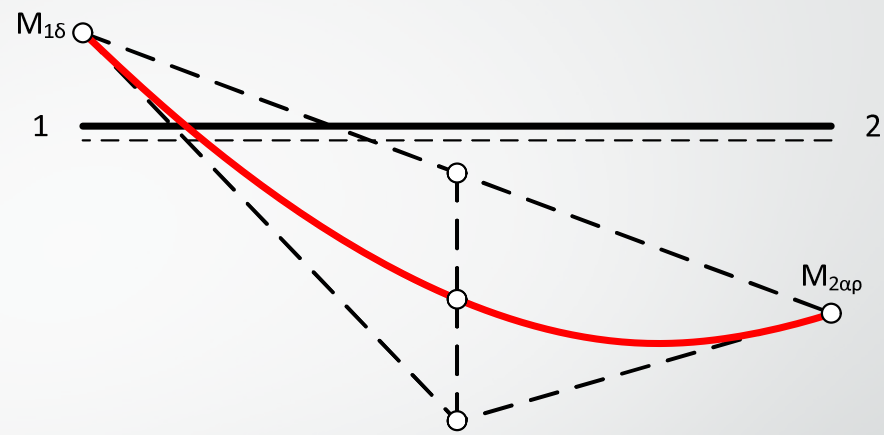


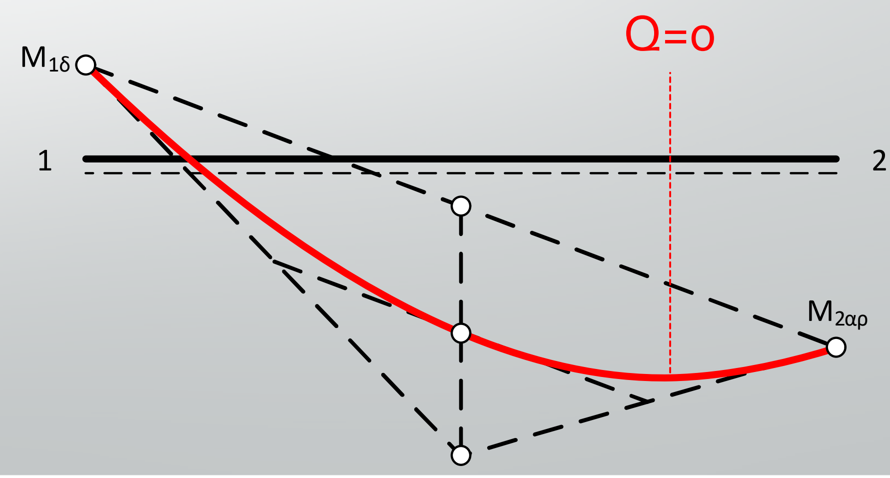
- *Ενώνουμε το τελικό σημείο με τα σημεία $M_{1\delta}$ και $M_{2\alpha\rho}$ με διακεκομμένη γραμμή.*



Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (MQN)

- *Το τελικό διάγραμμα σχεδιάζεται **εφαπτομενικά** στις γραμμές που τραβήξαμε και διέρχεται από το ενδιάμεσο σημείο.*
- *Για καλύτερα αποτελέσματα, μπορούμε να σχεδιάσουμε και την παράλληλη που διέρχεται από το ενδιάμεσο σημείο. Η καμπύλη θα είναι εφαπτόμενη και σε αυτήν την βοηθητική ευθεία.*
- *Το σημείο μηδενισμού του διαγράμματος των τεμνουσών (αν υπάρχει) ταυτίζεται με το τοπικό ακρότατο του διαγράμματος των καμπτικών ροπών (αν υπάρχει).*

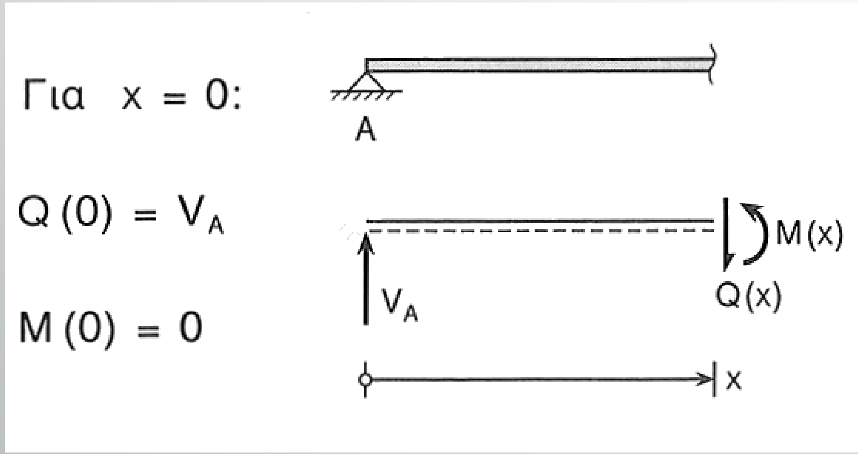




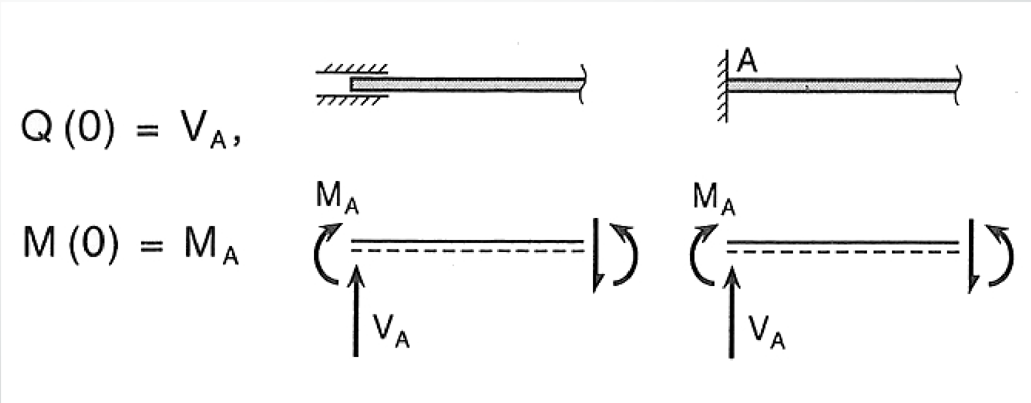
Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (ΜΩΝ)

- *Κατά την ολοκλήρωση προκύπτουν δύο σταθερές ολοκλήρωσης: $Q_o=Q(o)$ και $M_o=M(o)$. Αυτές πρέπει να προσδιοριστούν από ισάριθμες* ***συνοριακές συνθήκες.***

(άρθρωση ή κύλιση χωρίς εξωτερικά εφαρμοζόμενη συγκεντρωμένη ροπή εκεί)



(διαμήκης οδηγός - πάκτωση)



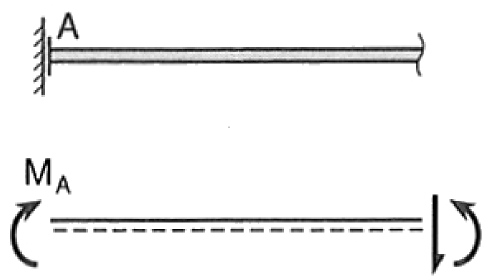
Διαγράμματα Εσωτερικών Δυνάμεων (MQN)

- *Κατά την ολοκλήρωση προκύπτουν δύο σταθερές ολοκλήρωσης: Q_o=Q(o) και M_o=M(o). Αυτές πρέπει να προσδιοριστούν από ισάριθμες **συνοριακές συνθήκες.***

(εγκάρσιος οδηγός,
δηλαδή κυλιόμενη πάκτωση)

$Q(0) = 0$

$M(0) = M_A$



(ελεύθερο άκρο χωρίς εξωτερικά εφαρμοζόμενη
συγκεντρωμένη δύναμη ή ροπή εκεί)

$Q(0) = 0,$

$M(0) = 0$