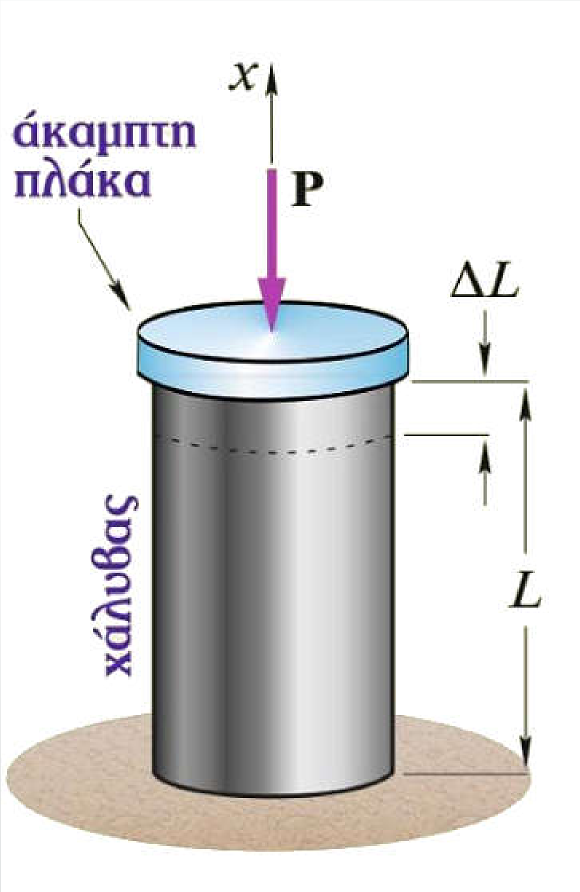
Ασκήσεις

Νόμος του Hooke

Άσκηση 1

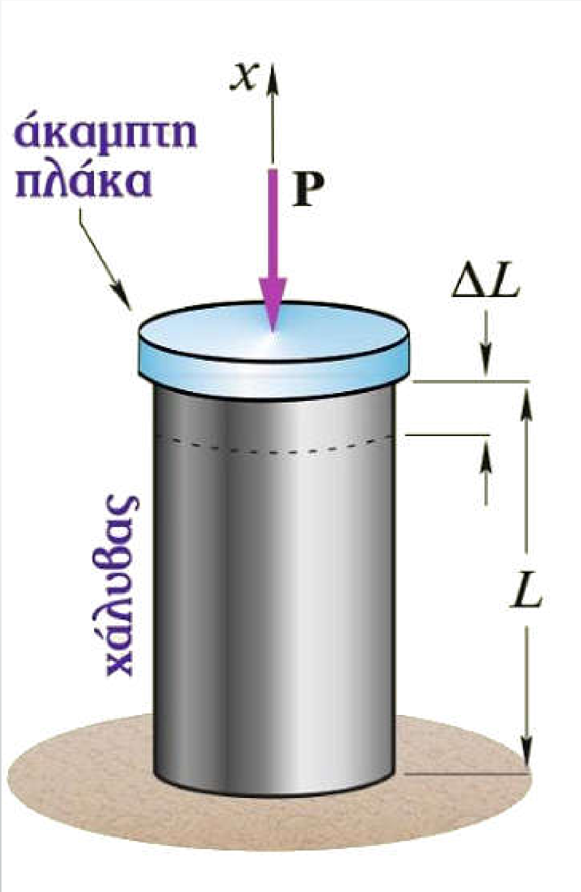
- *Κοίλος κύλινδρος (σωλήνας) φορτίζεται ομοιόμορφα μέσω άκαμπτης πλάκας από θλιπτικό φορτίο P. Αν αγνοηθεί το ίδιο βάρος, να υπολογιστεί η επιβράχυνση ΔL καθώς και η μέση ορθή τάση.*
- *Δίνονται: εξωτερική διάμετρος* $D = 10cm$, *πάχος* $t = 5mm$, $P = 100kN$, $L = 4m$, $E = 210GPa.$



Άσκηση 1

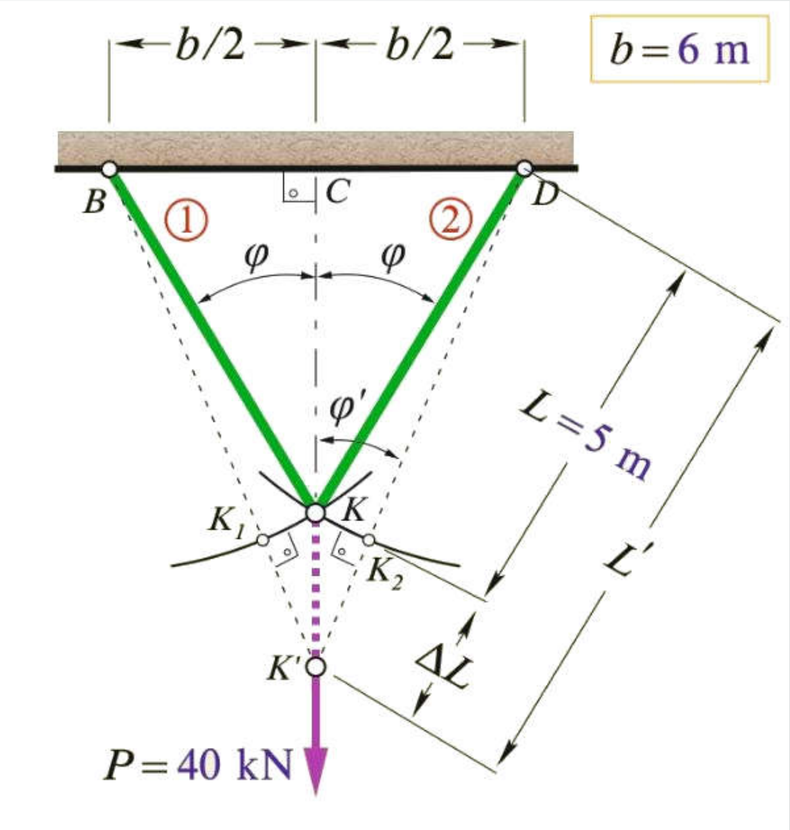
- $\Delta L = \frac{-P}{EA}L = \frac{-100kN}{210\times10^6 kN/m^2 \times \pi\left(\frac{0.1^2-0.09^2}{4}\right)m^2}4m$
$= -0.00127643m \cong -1.28mm.$

- $\sigma = \frac{-P}{A} = \frac{-100kN}{\pi\left(\frac{0.1^2-0.09^2}{4}\right)m^2} = -67012.6kPa \cong$
$-\ 67MPa.$



Άσκηση 2

- *Ζητείται η μετακίνηση του κόμβου Κ υπό την επίδραση της δύναμης P.*
- *Δίνονται:* $A = 4cm^2$, $b = 6m$, $P = 40kN$, $L = 5m$, $E = 210GPa$.

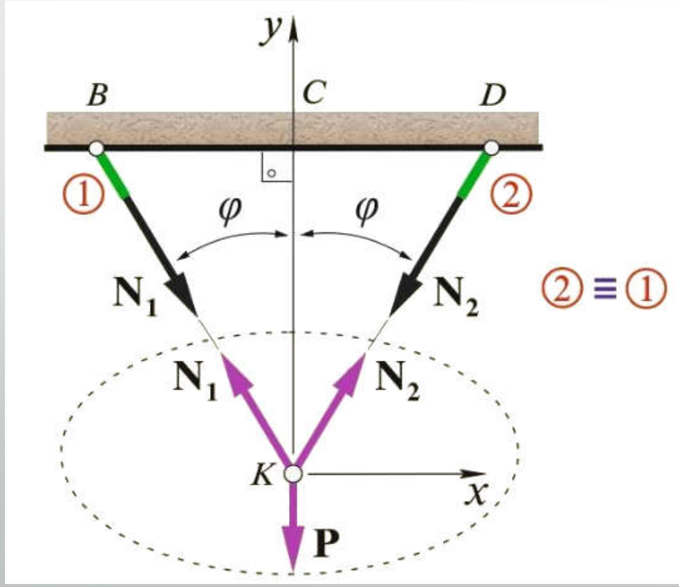


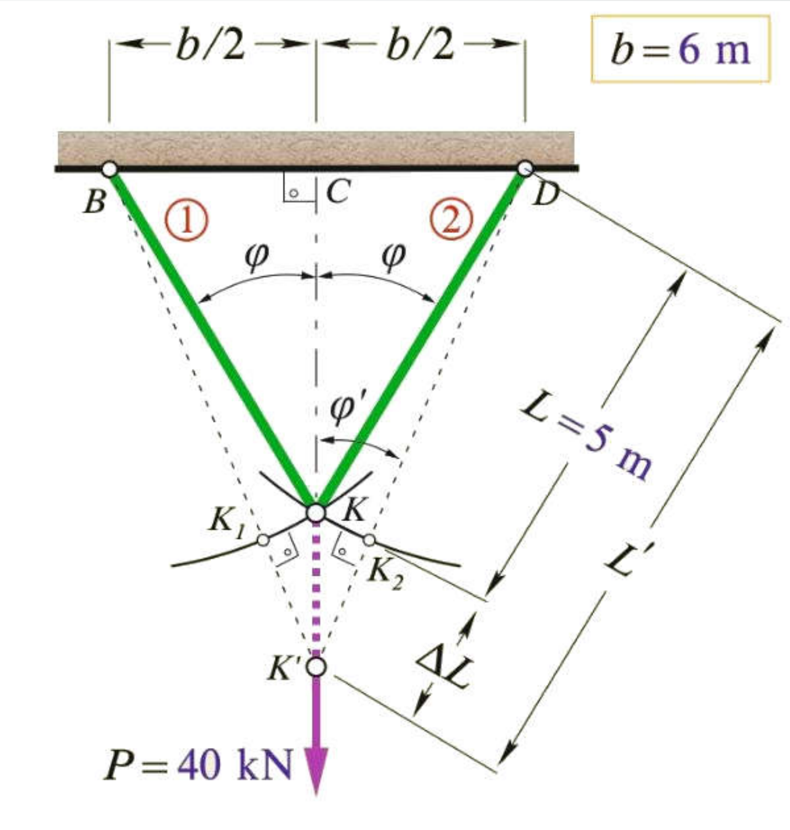
Άσκηση 2

- *Λόγω συμμετρίας* $N_1 = N_2 = N$. *Από ισορροπία του κόμβου* K,

$$2Ncos\varphi = P \Rightarrow N = \frac{P}{2cos\varphi} = 25kN$$

- *διότι* $\sin\varphi = \frac{b/2}{L} = \frac{3}{5}, \varphi \cong 36.87^o$, $cos\varphi = \frac{4}{5}$



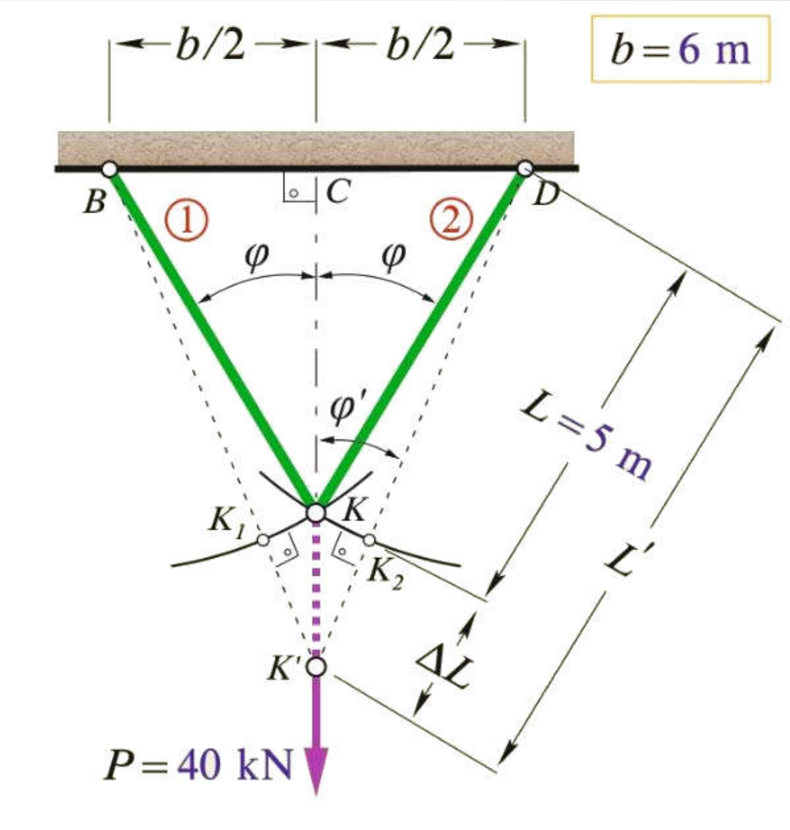


Άσκηση 2

- $\Delta L = \frac{N}{EA} L = \frac{25kN}{210\times10^6 kN/m^2 \times 4\times10^{-4} m^2} 5m$ $= 0.0014881m \cong 1.49mm.$
- *Η γωνία φ δεν αλλάζει πρακτικά, οπότε*

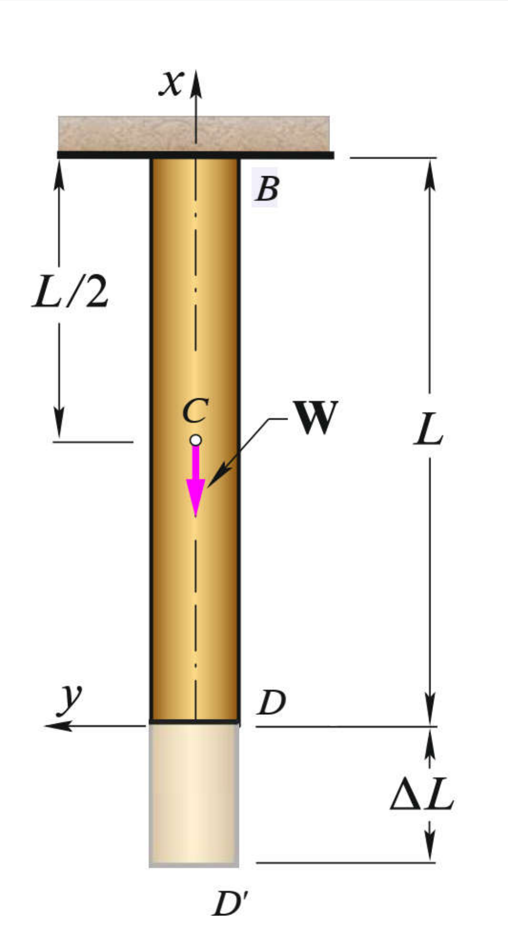
$$KK' = \frac{\Delta L}{cos\varphi} = 1.86mm$$

- Πράγματι, $\sin\varphi' = \frac{\frac{b}{2}}{L+\Delta L} = \frac{3}{5.0014881}, \varphi' \cong 36.86^o.$



Άσκηση 3

- *Δίνεται η πακτωμένη κατακόρυφη ράβδος του σχήματος. Να βρεθεί η επιμήκυνση* ΔL *λόγω ίδιου βάρους σε κάθε θέση της δοκού. Δίνονται* A, L, E, γ.

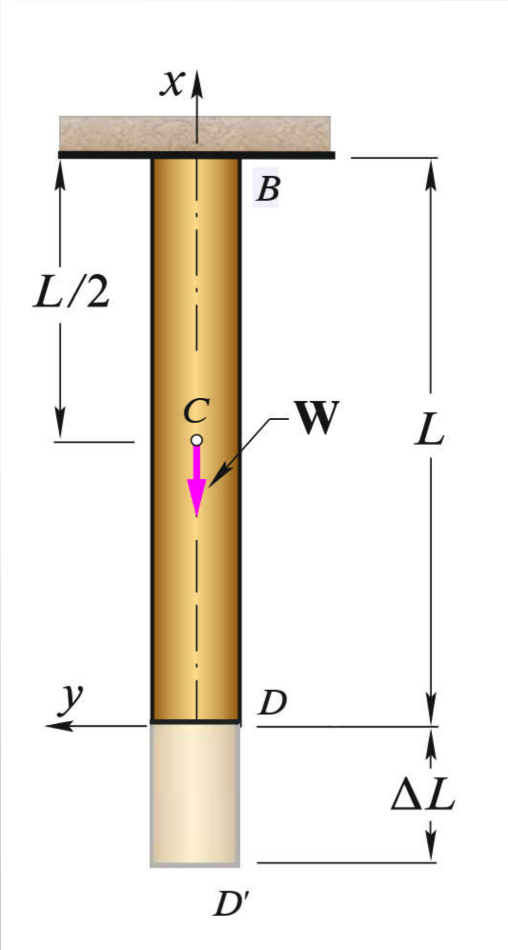


Άσκηση 3

- ***Προσοχή***! *Η ένταση του ίδιου βάρους δεν είναι η ίδια καθ' ύψος. Συνεπώς αν θέλαμε να υπολογίσουμε την συνολική επιμήκυνση και χρησιμοποιούσαμε την σχέση*

$$\Delta L = \frac{W}{EA}L = \frac{\gamma AL}{EA}L = \frac{\gamma L^2}{E}$$

δεν *θα παίρναμε το σωστό αποτέλεσμα.*

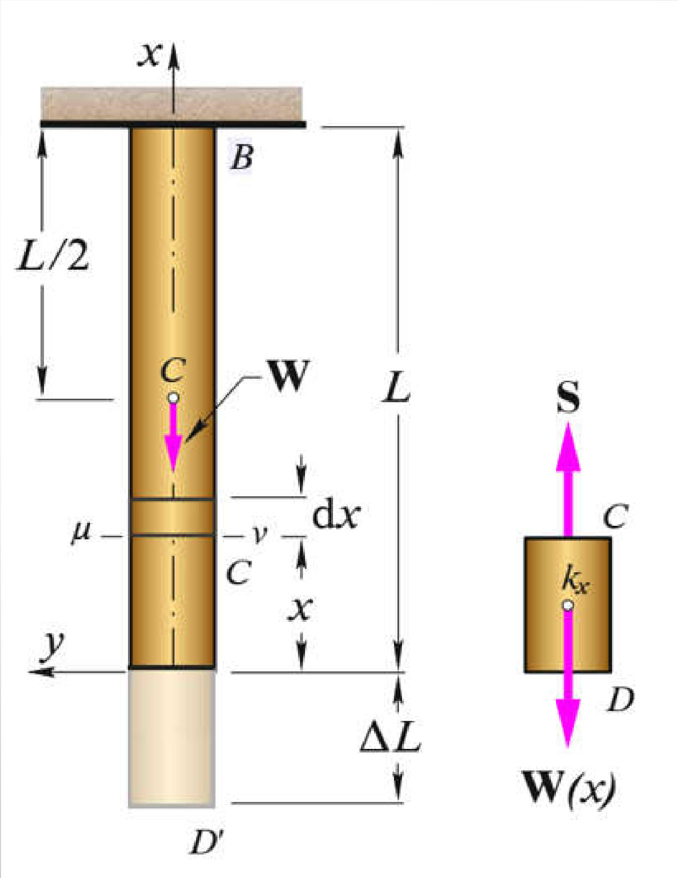


Άσκηση 3

- *Θεωρούμε άξονα x κατακόρυφο, με x=ο στο **κάτω** άκρο της δοκού.*
- *Η ορθή τάση:* $\sigma(x) = \frac{W(x)}{A} = \frac{xA\gamma}{A} = \gamma x$.
- *Η επιμήκυνση στοιχειώδους τμήματος μήκους* dx *λόγω εφελκυστικής τάσης* $\sigma(x)$ *θα είναι:*

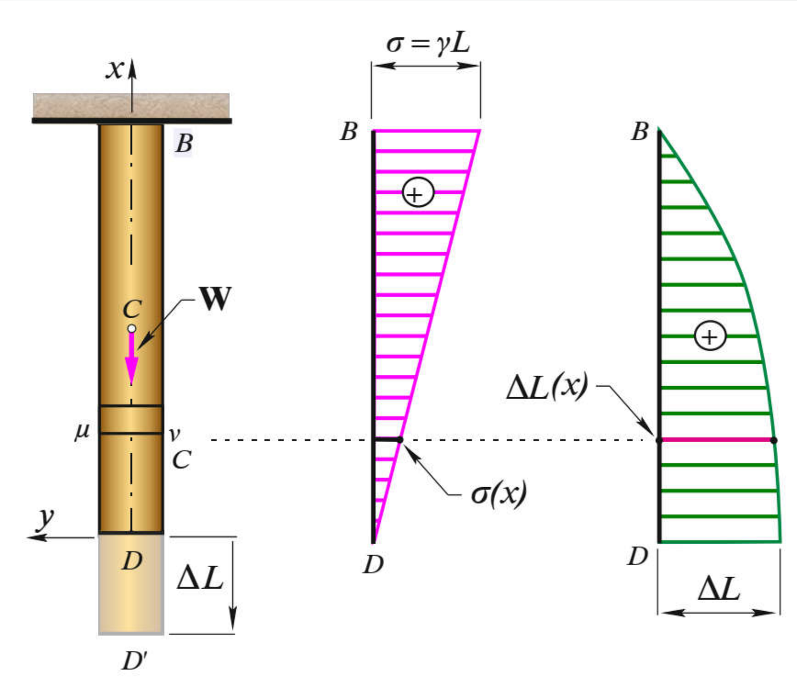
$$du = \varepsilon\, dx = \frac{\sigma(x)}{E} dx \text{ ή } du = \frac{W(x)}{EA} dx$$

- *Τότε* $\Delta L(x) = \int_x^L du = \int_x^L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \int_x^L \frac{\gamma x}{E} dx = \frac{\gamma}{E}\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^L = \frac{\gamma}{2E}(L^2 - x^2)$



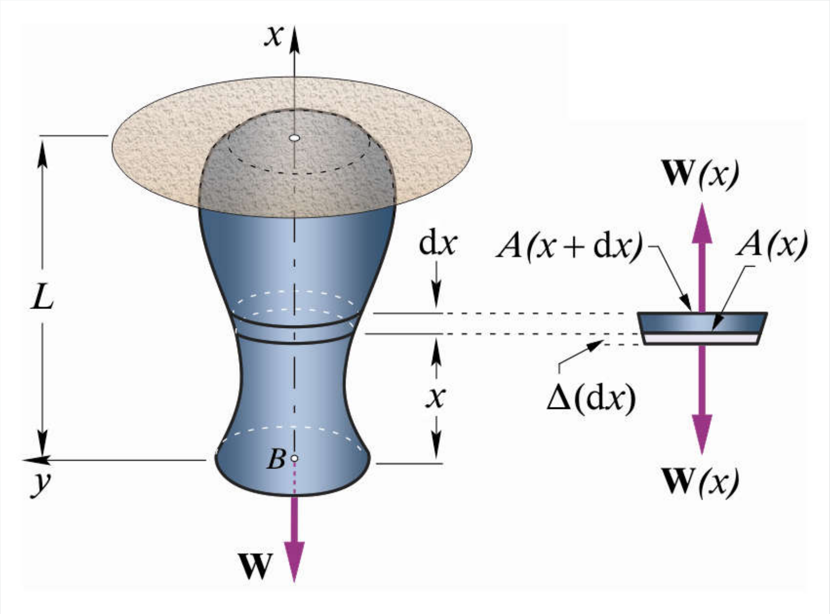
Άσκηση 3

- $\Delta L(x) = \frac{\gamma}{2E}(L^2 - x^2)$.
- *Η μέγιστη ολική επιμήκυνση δίνεται για* $x = 0$, *όπου* $\Delta L = \Delta L(0) = \frac{\gamma L^2}{2E}$.
- *Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν θεωρούσαμε ότι το βάρος* W *επιμηκύνει το μισό άνω τμήμα της δοκού* $(L/2)$ *και παίρναμε τον απλοποιητικό τύπο.*



Άσκηση 4

- *Δίνεται η πακτωμένη κατακόρυφη* ***μη πρισματική*** *ράβδος του σχήματος. Να βρεθεί η συνολική επιμήκυνση* ΔL_w *λόγω ίδιου βάρους. Δίνονται* $A(x), L, E, \gamma$.



Άσκηση 4

- *Η ορθή τάση:*

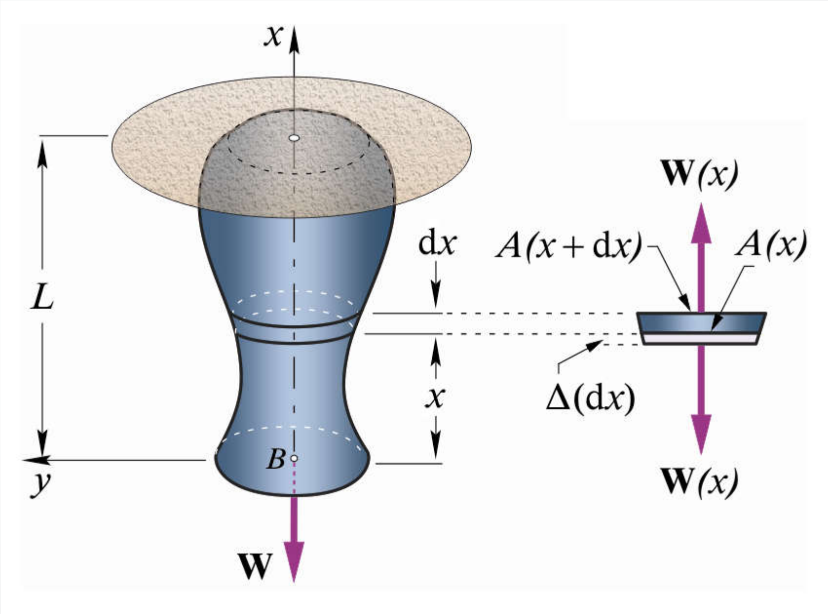
$$\sigma(x) = \frac{W(x)}{A(x)} = \frac{V(x)\gamma}{A(x)}$$

όπου $V(x)$ η συνάρτηση που δίνει ***τον συνολικό όγκο του υλικού κάτω από τομή σε θέση x****:*

$$V(x) = \int_0^x dV = \int_0^x A(x)dx$$

- *Η επιμήκυνση στοιχειώδους τμήματος μήκους dx λόγω εφελκυστικής τάσης $\sigma(x)$ θα είναι:*

$$du = \varepsilon\, dx = \frac{\sigma(x)}{E} dx \text{ ή } du = \frac{V(x)\gamma}{EA(x)} dx$$



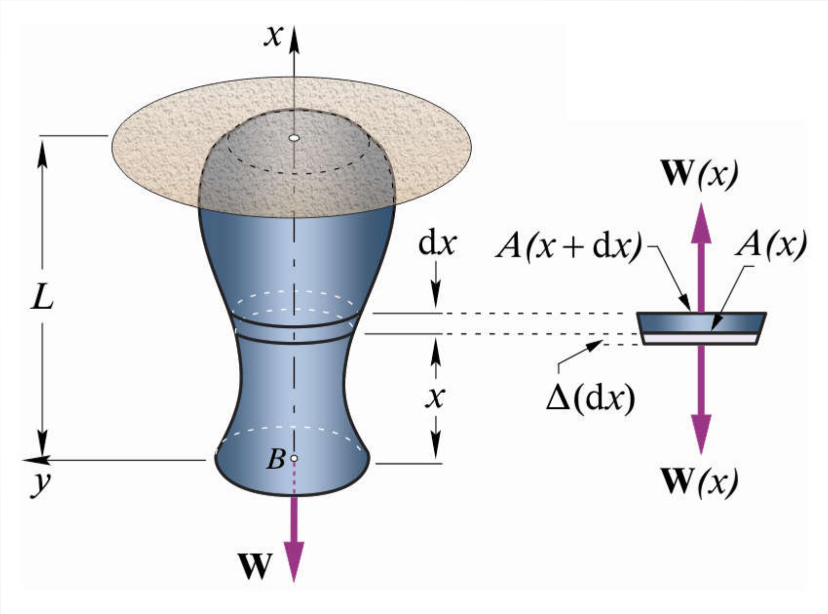
Άσκηση 4

- *Τότε:*

$$\Delta L_w = \int_0^L du = \int_0^L \frac{V(x)\gamma}{EA(x)}dx \Rightarrow$$

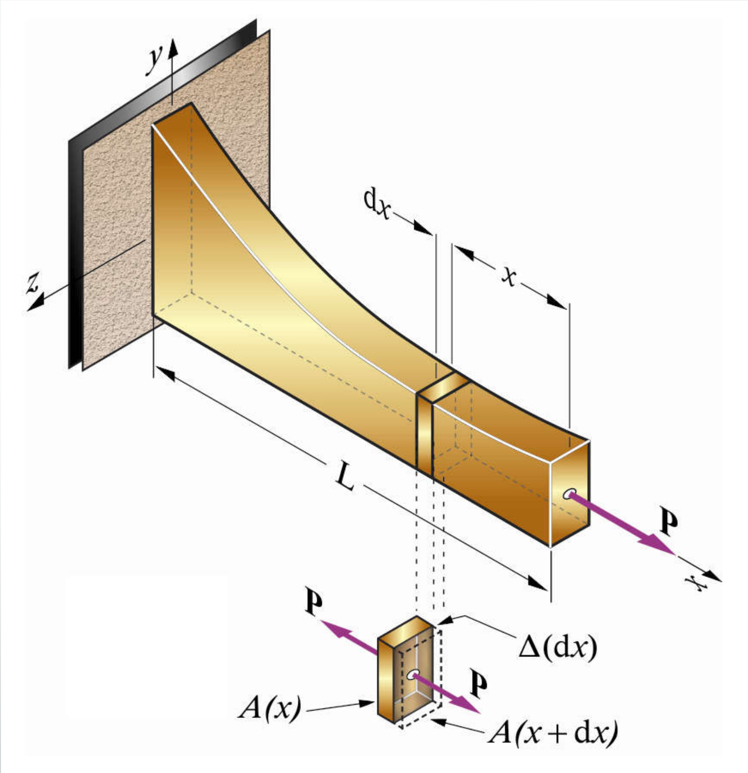
$$\boldsymbol{\Delta L_w = \frac{\gamma}{E}\int_x^L \frac{V(x)}{A(x)}dx}$$

- *Με* $\boldsymbol{V(x) = \int_0^x A(x)dx}$



Άσκηση 6

- *Δίνεται η πακτωμένη αβαρής **μη πρισματική** ράβδος του σχήματος. Να βρεθεί η συνολική επιμήκυνση ΔL_P λόγω σταθερής δύναμης P. Δίνονται $A(x), L, E, \gamma$.*



Άσκηση 6

- *Η ορθή τάση:*

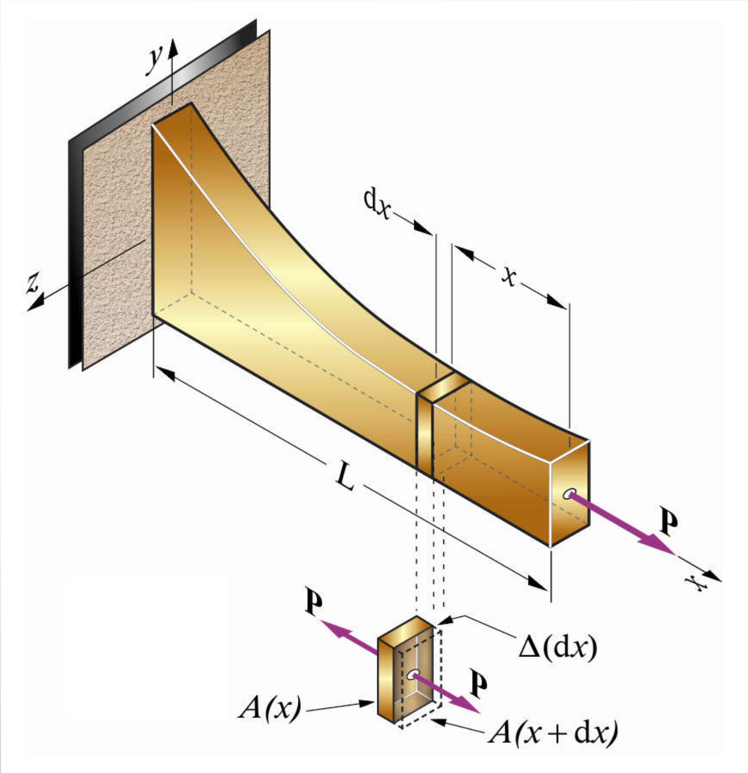
$$\sigma(x) = \frac{P}{A(x)}$$

- *Η επιμήκυνση στοιχειώδους τμήματος μήκους dx λόγω εφελκυστικής τάσης $\sigma(x)$ θα είναι:*

$$du = \varepsilon\, dx = \frac{\sigma(x)}{E} dx \text{ ή } du = \frac{P}{EA(x)} dx$$

- *Τότε:*

$$\Delta L_P = \int_0^L du \Rightarrow \boldsymbol{\Delta L_P = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}}$$



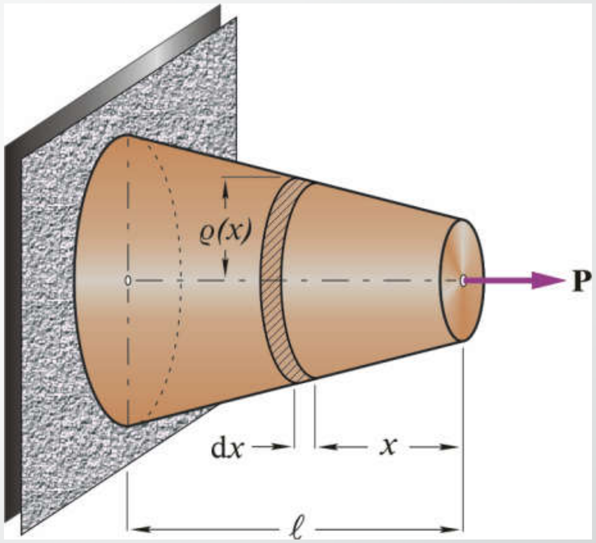
Άσκηση 6

- ***Συνέχεια άσκησης***: *να γίνει εφαρμογή σε αβαρή κόλουρο κώνο, μεγάλης ακτίνας R, μικρής ακτίνας r και μήκους ℓ, που εφελκύεται από δύναμη P.*
- *Η ακτίνα ρ σε θέση x από την μη πακτωμένη άκρη του κώνου θα είναι (από όμοια τρίγωνα):*

$$\rho(x) = r + \frac{(R-r)}{\ell}x$$

- *Άρα το εμβαδόν της διατομής σε θέση x:*

$$A(x) = \pi[\rho(x)]^2 = \pi\left[r + \frac{(R-r)}{\ell}x\right]^2$$



Άσκηση 6

- *Είδαμε ότι:*

$$\Delta L_P = \frac{P}{E}\int_0^{\ell} \frac{dx}{A(x)}$$

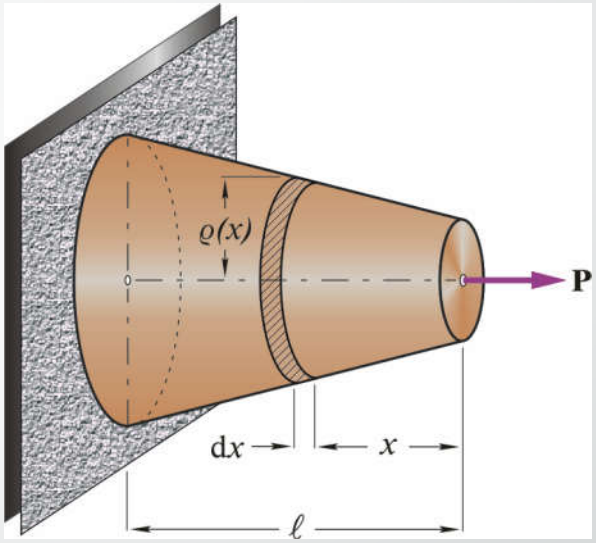
- *Άρα:*

$$\Delta L_P = \frac{P}{E}\int_0^{\ell} \frac{dx}{\pi\left[r + \frac{(R-r)}{\ell}x\right]^2}$$

$$= \frac{P\ell}{E(R-r)\pi}\int_0^{\ell} \frac{d\left[r + \frac{(R-r)}{\ell}x\right]}{\left[r + \frac{(R-r)}{\ell}x\right]^2}$$

$$= -\frac{P\ell}{E(R-r)\pi}\left[r + \frac{(R-r)}{\ell}x\right]^{-1}\Bigg|_0^{\ell}$$

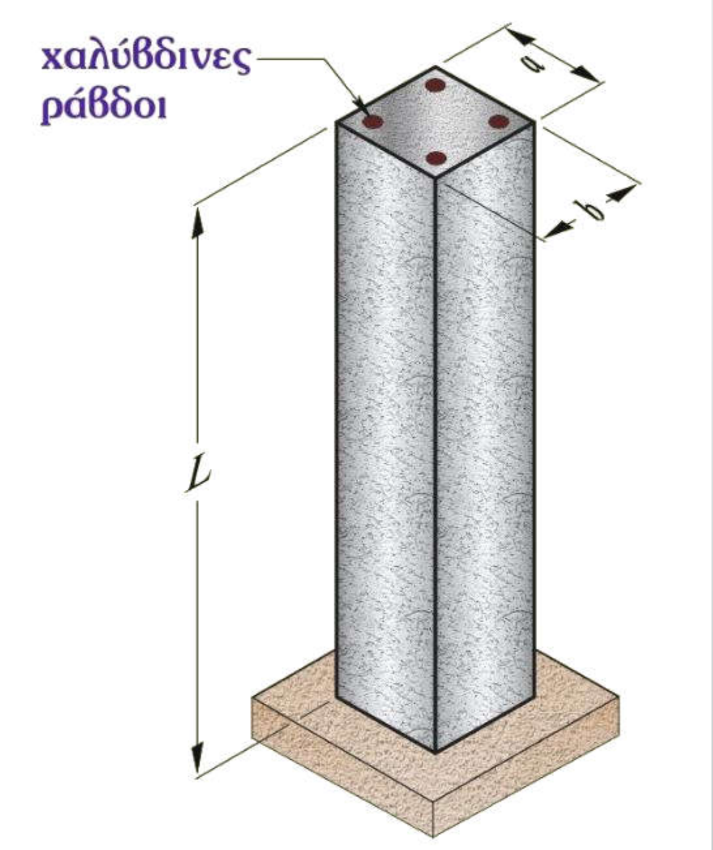
$$= \frac{P\ell}{\pi E R r} = \frac{P\ell}{E\sqrt{A_R A_r}}$$



- Άρα η συνολική επιμήκυνση του κόλουρου κώνου αντιστοιχεί σε πρισματική διατομή σταθερού εμβαδού $A = \sqrt{A_R A_r}$.

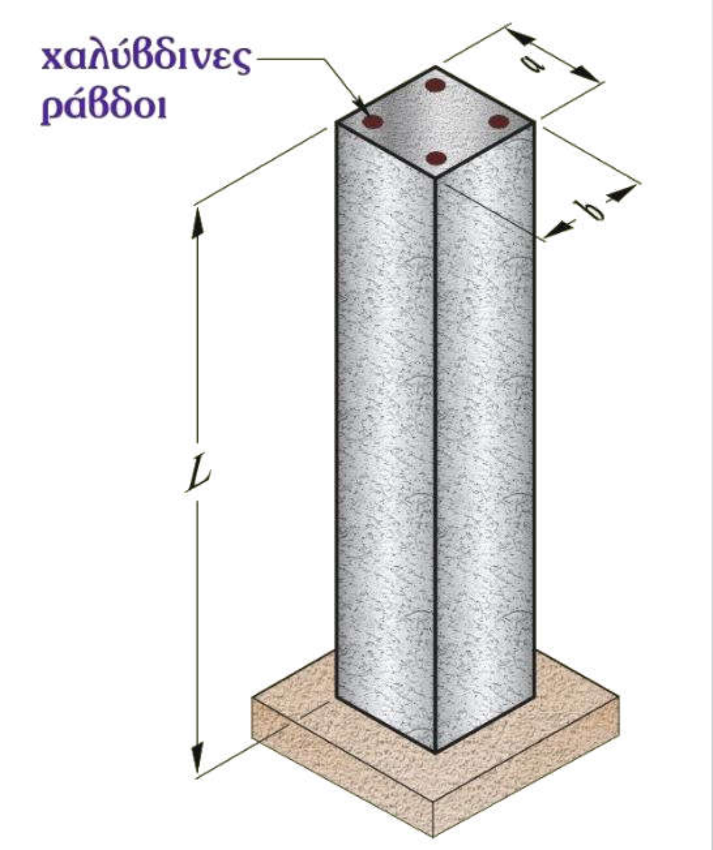
Άσκηση 7

- ***Ομογενοποίηση ράβδων εν παραλλήλω:*** *να βρείτε τα χαρακτηριστικά μιας ισοδύναμης ράβδου που συμπεριφέρεται όπως δύο ράβδοι με χαρακτηριστικά* (E_1, A_1), (E_2, A_2) *συνδεδεμένες παράλληλα.*



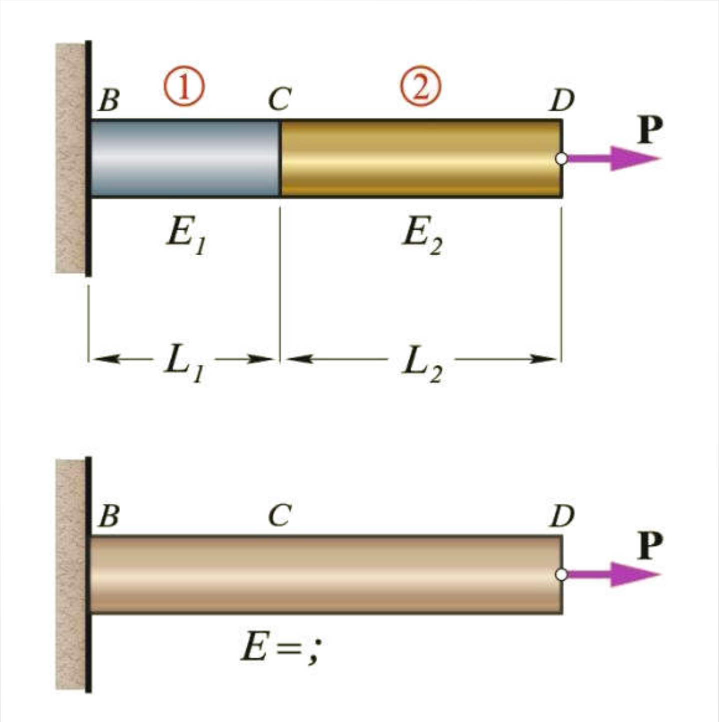
Άσκηση 7

- *Η ισοδύναμη ράβδος θα έχει εμβαδόν:*
$$A = A_1 + A_2$$
- *Για να βρούμε το μέτρο ελαστικότητας E, παρατηρούμε ότι αν επιβάλουμε αξονική δύναμη* P*, η παραμόρφωση θα είναι κοινή για τις δύο ράβδους:*
$$\delta = \delta_1 = \delta_2$$
$$\frac{PL}{EA} = \frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$
- *Επιπλέον,* $P = P_1 + P_2$.
- *Προκύπτει:* $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{E_1} + \frac{\boldsymbol{A_2}}{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{E_2}$
(τύπος του Voght)



Άσκηση 8

- ***Ομογενοποίηση ράβδων εν σειρά:*** *να βρείτε τα χαρακτηριστικά μιας ισοδύναμης ράβδου που συμπεριφέρεται όπως δύο ράβδοι με χαρακτηριστικά* (E_1, L_1)*,* (E_2, L_2)*, ίσου εμβαδού* A*, συνδεδεμένες σε σειρά.*



Άσκηση 8

- *Για να βρούμε το μέτρο ελαστικότητας Ε, παρατηρούμε ότι αν επιβάλουμε αξονική δύναμη P, αυτή θα επιβάλλεται αυτούσια σε κάθε μία ράβδο, και η συνολική επιμήκυνση θα είναι:*

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

$$\frac{PL}{EA} = \frac{PL_1}{E_1 A} + \frac{PL_2}{E_2 A}$$

- *Επιπλέον,* $L = L_1 + L_2$.
- *Προκύπτει:* $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E_1 E_2 (L_1 + L_2)}}{\boldsymbol{E_1 L_1 + E_2 L_2}}$ *(τύπος του Reuss)*