

Κύριες τάσεις –
κύρια επίπεδα

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

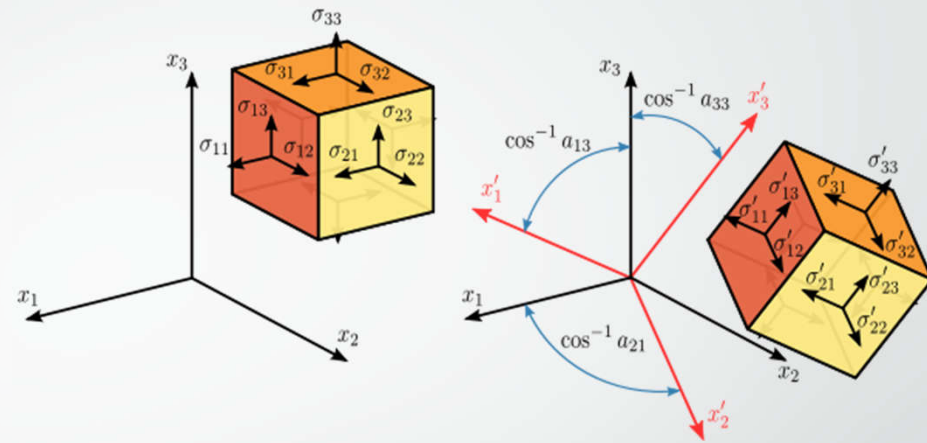
- Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) ενός τανυστή β' τάξης (που μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν δισδιάστατο πίνακα) στην γενική περίπτωση της τριαξονικής έντασης γίνεται μέσω ενός **μητρώου μετασχηματισμού Λ_S** :

$$\Lambda_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- όπου a_{ij} τα **συνημίτονα κατεύθυνσης**, δηλαδή $a_{ij} = \cos(\varphi_{ij})$.

- Τότε αν $\Lambda_S^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ (ανάστροφος), αποδεικνύεται ότι

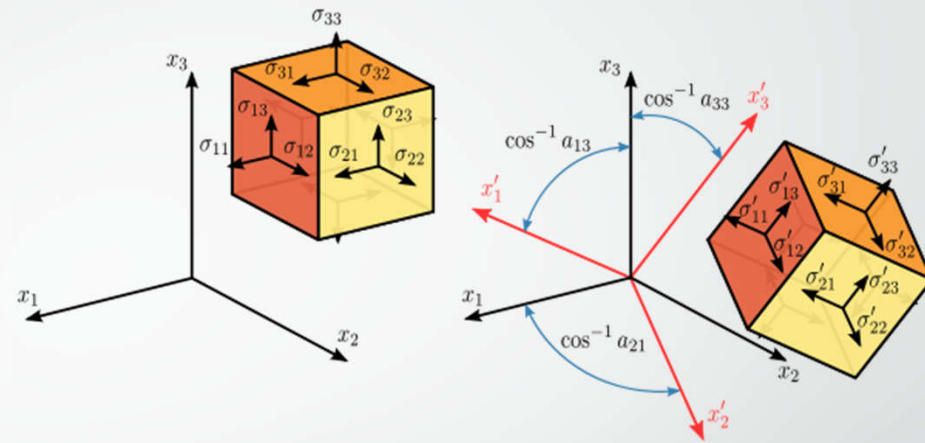
$\Lambda_S \Lambda_S^T = \Lambda_S^T \Lambda_S = I$, δηλαδή ο ανάστροφος πίνακας είναι και αντίστροφος.



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Ο μετασχηματισμός γίνεται ως εξής:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



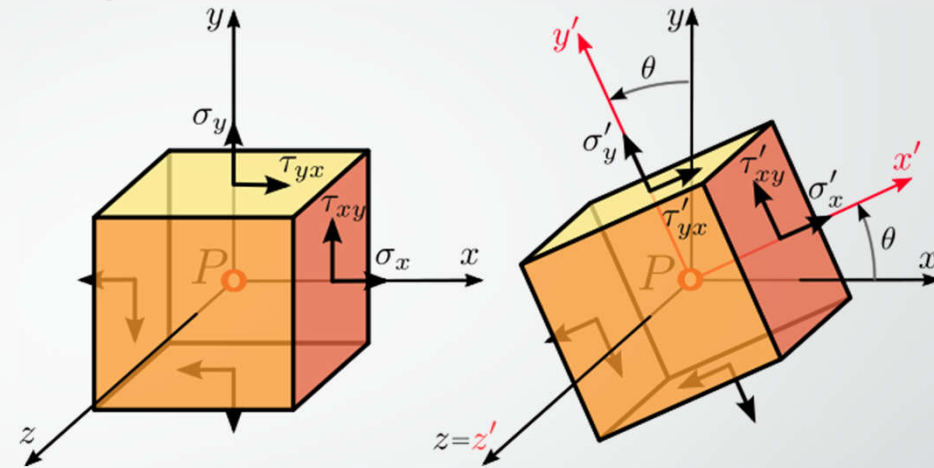
- $[\sigma'] = \Lambda_s [\sigma] \Lambda_s^T$ (από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).
- $[\sigma] = \Lambda_s^T [\sigma'] \Lambda_s$ (από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).
- Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) ενός τανυστή α' τάξης (διάνυσμα) γίνεται ως εξής:
- $\{v'\} = \Lambda_s \{v\}$ (από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).
- $\{v\} = \Lambda_s^T \{v'\}$ (από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Αντίστοιχος μετασχηματισμός μπορεί να γίνει και στην περίπτωση επίπεδης έντασης, έστω στο επίπεδο xy . Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, την γωνία θ .
- Σχηματίζουμε το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού στο επίπεδο Λ_p :

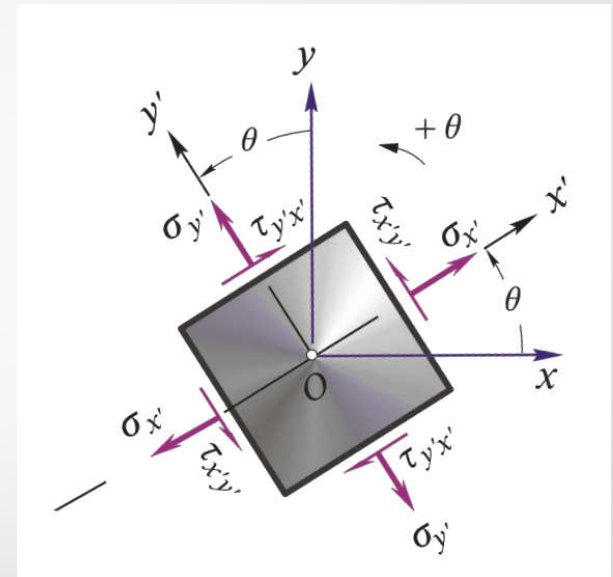
$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Τότε ο μετασχηματισμός του ταυυστή των τάσεων $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ γίνεται όπως προηγουμένως.



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Αναλύοντας τις σχέσεις για το επίπεδο, προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ σε κάποιο σύστημα αξόνων Oxy , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τάσεις $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$ σε κάποιο στραμμένο κατά γωνία θ σύστημα $Ox'y'$, (η γωνία θ θετική Α.Δ.Ω. όπως στο σχήμα).
- Οι σχέσεις που δίνουν τις $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$ είναι:
 - $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$
 - $\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$
 - $\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$
- Παρατηρείστε ότι $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}$.



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

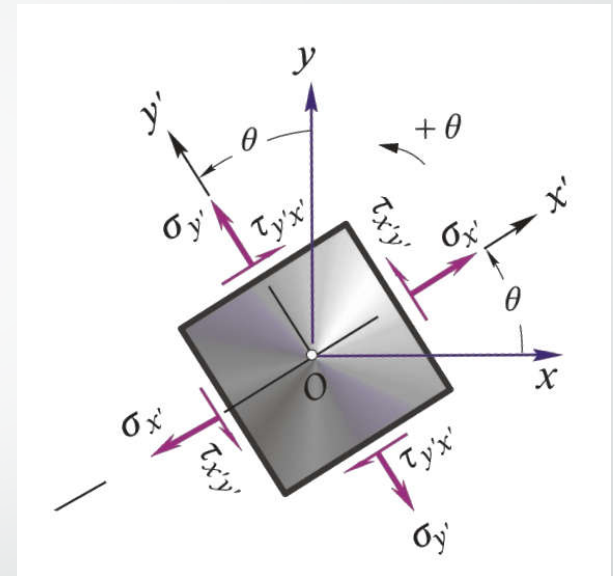
- Με βάση την τρίτη σχέση μετασχηματισμού, που δίνει τις νέες διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

- προκύπτει ότι υπάρχει μια ειδική τιμή της γωνίας θ , έστω γωνία θ_0 , για την οποία η διατμητική τάση $\tau_{x'y'}$ στο νέο σύστημα μηδενίζεται. Λύνω ως προς θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right), -45^\circ \leq \theta_0 \leq 45^\circ$$

- Θα ονομάσουμε **κύριο άξονα 1**, αυτόν για τον οποίο μηδενίζονται οι διατμητικές τάσεις και βρίσκεται πλησιέστερα στον «ισχυρότερο» εκ των αξόνων x, y . Ο **κύριος άξονας 2** θα είναι κάθετος στον άξονα 1.



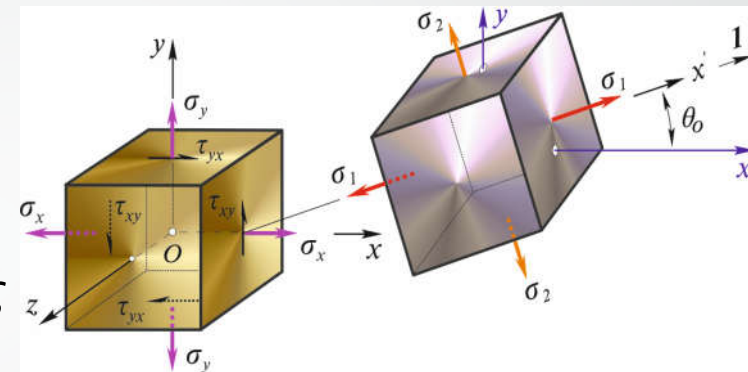
Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Οι άξονες 1 και 2 ονομάζονται **κύριοι άξονες**.
- Τα επίπεδα τα κάθετα στους άξονες 1 και 2 ονομάζονται **κύρια επίπεδα**.
- Οι τάσεις σ_1, σ_2 που αντιστοιχούν στους κύριους άξονες ονομάζονται **κύριες τάσεις**.
- Αντικαθιστώντας την γωνία θ_0 στις σχέσεις μετασχηματισμού προκύπτει:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{max}$$

$$Με \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



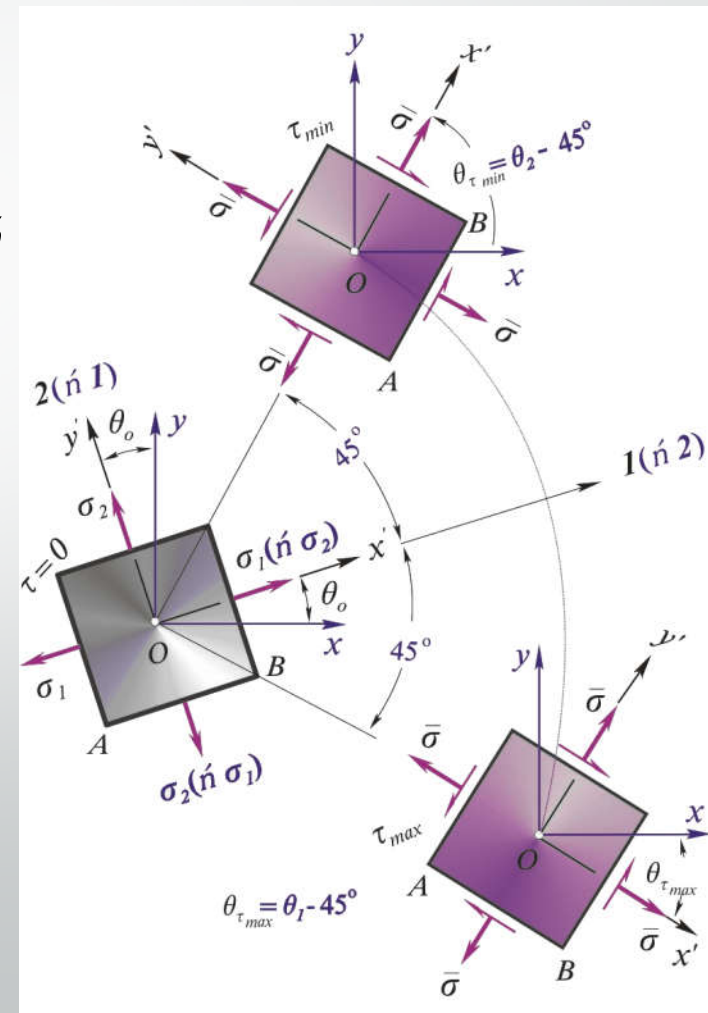
Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Παραγωγίζοντας την σχέση που δίνει τις νέες διατμητικές τάσεις στο στραμμένο σύστημα και θέτοντας τις παραγώγους ίσες με το μηδέν προκύπτει ότι η ελάχιστη και η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζονται σε διευθύνσεις -45° και $+45^\circ$ σε σχέση με τους κύριους άξονες (δηλαδή τους **διχοτομούν**). Εκεί:

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων που εμφανίζονται τα ακρότατα στην $\tau_{x'y'}$ θα είναι

$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$



Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Παρατηρούμε ότι $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$. Αυτό συμβαίνει γενικά, **διότι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του τανυστή παραμένει αναλλοίωτο** (σταθερό) κατά την περιστροφή καθ' οποιονδήποτε τρόπο.

- Γενικά υπάρχουν τρεις αναλλοίωτες του τανυστή: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

1. **Ίχνος (trace) ή άθροισμα των ορθών τάσεων:** $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

2. **Άθροισμα ελασσόνων οριζουσών:**

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

3. **Ορίζουσα του τανυστή:** $J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Οι τρεις αναλλοίωτες του τανυστή παραμένουν φυσικά οι ίδιες και στο κύριο σύστημα, όπου ο τανυστής διαγωνιοποιείται και παίρνει την μορφή:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- Έτσι:

- $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$

- $J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2.$

- $J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Γενικότερα, οι κύριες τάσεις δεν είναι παρά οι ιδιοτιμές του ταυυστή των τάσεων. Ο ταυυστής των τάσεων διαγωνιοποιείται, και σύμφωνα με την Γραμμική Άλγεβρα οι ιδιοτιμές προκύπτουν από την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$|\sigma_{ij} - \sigma_k \mathbf{I}| = 0 \quad (1)$$

- όπου, $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ ο ταυυστής, \mathbf{I} ο μοναδιαίος 3×3 και σ_k οι άγνωστες ιδιοτιμές ($k = 1, 2, 3$).

- Αναλύοντας την (1):
$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_k) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_k) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_k) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(\sigma_k)^3 - J_1(\sigma_k)^2 + J_2\sigma_k - J_3 = 0 \quad (2)$$

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- Λύνοντας την (2) $(\sigma_k)^3 - J_1(\sigma_k)^2 + J_2\sigma_k - J_3 = 0$ προκύπτουν οι ιδιοτιμές (δηλαδή οι κύριες τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).
- Για κάθε ιδιοτιμή σ_k μπορεί να υπολογιστεί το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα n από την σχέση:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_k I)n = 0$$

- Τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται και **κατευθύνοντα συνημίτονα** των γωνιών που σχηματίζουν οι στραμμένοι άξονες με τους αρχικούς.
- Επειδή μας ενδιαφέρει η διεύθυνσή τους, συνήθως κανονικοποιούνται ώστε να έχουν μέτρο (μήκος) μονάδα:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

- Επειδή είναι κατευθύνοντα συνημίτονα γωνιών, αν τα βάλουμε (όλα) σε έναν πίνακα τότε προκύπτει το μητρώο μετασχηματισμού Λ_S που μας μεταφέρει από το **τρέχον σύστημα** στο **κύριο σύστημα**.