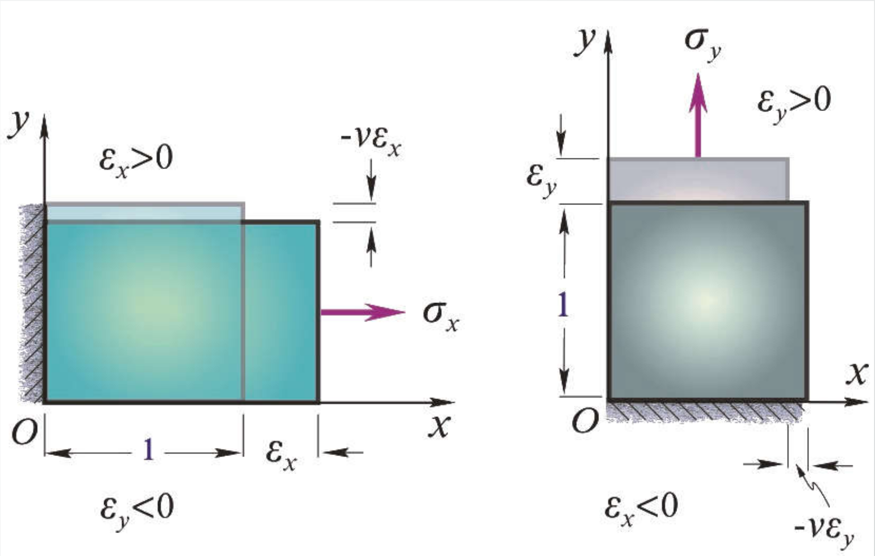
Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- *Είδαμε ότι **η ορθή τροπή ή παραμόρφωση ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής του μήκους ενός στοιχείου, προς το αρχικό του μήκος**.*
- *Για επίπεδη ένταση τέτοιες είναι οι ε_x, ε_y κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x, y αντίστοιχα.*



- *Σημειώνουμε ότι οι ορθές τροπές είναι προφανώς αδιάστατα μεγέθη.*
- *Έτσι **αν ένα στοιχείο αυξάνει το μήκος του**, συνεπώς η μεταβολή μήκους του είναι θετική, τότε και η αντίστοιχη γραμμική παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση αυτή είναι **θετική**.*
- *Αντίστροφα **αν μειώνεται το μήκος του, η αντίστοιχη ορθή παραμόρφωση είναι αρνητική.***

Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

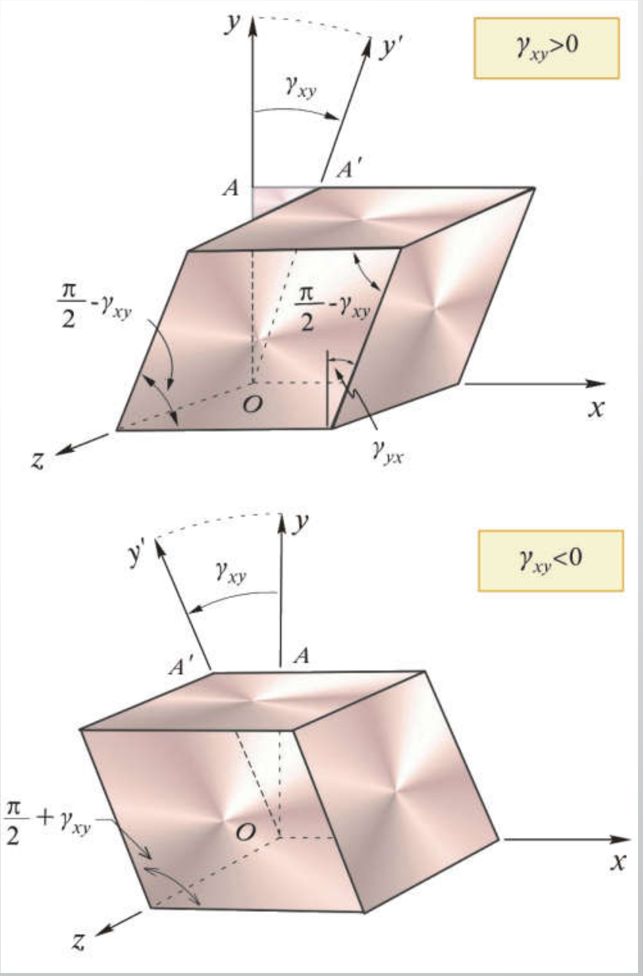
- ***Η γωνία διάτμησης γ_{xy}*** *ισούται με τη μεταβολή της αρχικά ορθής γωνίας που έχει πλευρές τους άξονες x, y και είναι θετική, όταν μετά την παραμόρφωση οι x, y πλησιάσουν και αρνητική όταν απομακρυνθούν.*
- *Για ομοιομορφία των σχέσεων, ορίζουμε ως* ***διατμητική παραμόρφωση*** *την ποσότητα:*

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

- *Τότε ο τανυστής των τροπών ή των παραμορφώσεων στην επίπεδη ένταση μπορεί να γραφεί ως:*

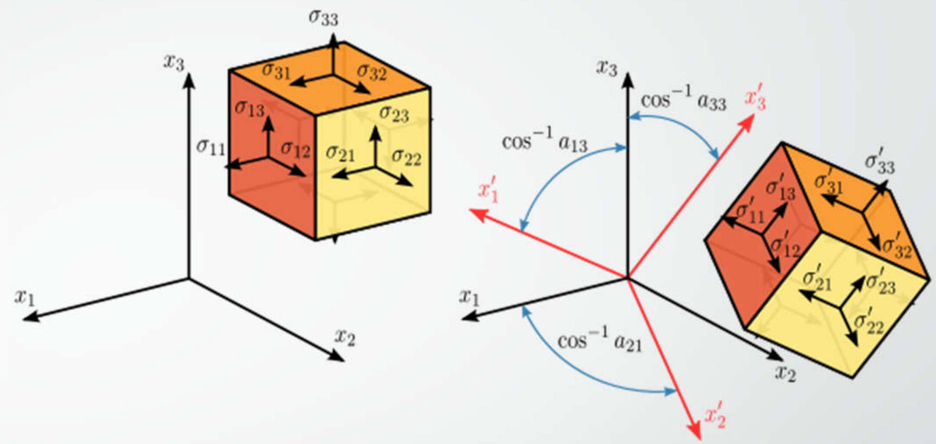
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

- *Στην τρισδιάστατη ένταση:* $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$



Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- *Όπως και στην περίπτωση του τανυστή των τάσεων, και ο τανυστής των τροπών μπορεί να μετασχηματιστεί (περιστραφεί) μέσω ενός **μητρώου μετασχηματισμού*** $\boldsymbol{\Lambda_s}$*:*



$$\Lambda_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

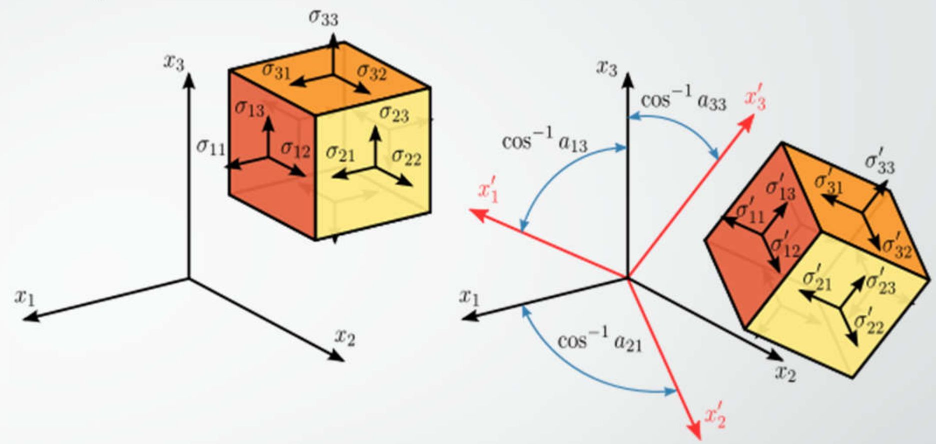
- *όπου* a_{ij} *τα **συνημίτονα κατεύθυνσης**, δηλαδή* $a_{ij} = \cos(\varphi_{ij})$*.*

- *Θυμίζουμε ότι αν* $\Lambda_s{}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ *(ανάστροφος), αποδεικνύεται ότι* $\Lambda_s \Lambda_s{}^T = \Lambda_s{}^T \Lambda_s = \mathrm{I}$*, δηλαδή ο ανάστροφος πίνακας είναι και αντίστροφος.*

Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- *Ο μετασχηματισμός γίνεται ως εξής:*

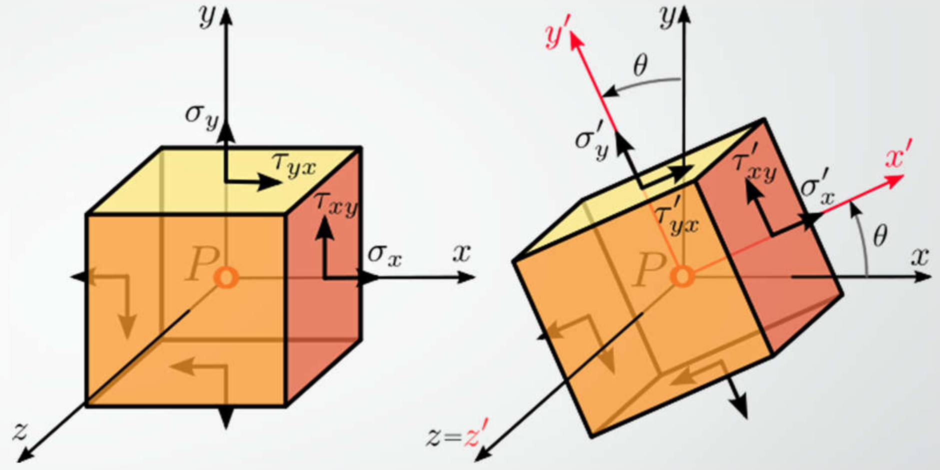
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



- $[\varepsilon'] = \Lambda_s[\varepsilon]\Lambda_s{}^T$ *(από το αρχικό σύστημα στο τονούμενο).*
- $[\varepsilon] = \Lambda_s{}^T[\varepsilon']\Lambda_s$ *(από το τονούμενο πίσω στο αρχικό).*

Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- *Αντίστοιχος μετασχηματισμός μπορεί να γίνει και στην περίπτωση επίπεδης έντασης, έστω στο επίπεδο xy. Ο μετασχηματισμός (περιστροφή) εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, την γωνία θ.*



- *Σχηματίζουμε το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού στο επίπεδο Λ_p:*

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

- *Τότε ο μετασχηματισμός του τανυστή των τροπών $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$ γίνεται όπως προηγουμένως.*

Κύριες τροπές – κύρια επίπεδα

- *Αναλύοντας τις σχέσεις για το επίπεδο, προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τροπές ε_x, ε_y, ε_{xy} σε κάποιο σύστημα αξόνων Oxy, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τροπές $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\varepsilon_{x'y'}$ σε κάποιο στραμμένο κατά γωνία ϑ σύστημα Ox'y', (η γωνία ϑ θετική Α.Δ.Ω.).*
- *Οι σχέσεις που δίνουν τις $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\varepsilon_{x'y'}$ είναι:*
  - $\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$
  - $\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$
  - $\varepsilon_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \varepsilon_{xy}\cos 2\theta$
- Παρατηρείστε ότι $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$.

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- *Με βάση την τρίτη σχέση μετασχηματισμού, που δίνει τις νέες διατμητικές τροπές:*

$$\varepsilon_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \varepsilon_{xy}\cos 2\theta$$

- *προκύπτει ότι υπάρχει μια ειδική τιμή της γωνίας θ, έστω γωνία θ_0, για την οποία η διατμητική παραμόρφωση $\varepsilon_{x'y'}$ στο νέο σύστημα μηδενίζεται. Λύνω ως προς θ_0:*

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right), -45° \le \theta_0 \le 45°$$

- *Θα ονομάσουμε **κύριο άξονα 1**, αυτόν για τον οποίο μηδενίζονται οι διατμητικές παραμορφώσεις και βρίσκεται πλησιέστερα στον «ισχυρότερο» εκ των αξόνων x, y. Ο **κύριος άξονας 2** θα είναι κάθετος στον άξονα 1.*

Κύριες τάσεις – κύρια επίπεδα

- ***Οι κύριοι άξονες αυτοί ταυτίζονται με τους κύριους άξονες των τάσεων***.
- *Επειδή οι διατμητικές παραμορφώσεις μηδενίζονται στους κύριους άξονες,* ***εκεί το στοιχειώδες απαραμόρφωτο τετράγωνο μετατρέπεται μετά την παραμόρφωση σε ορθογώνιο*** *(δεν αλλάζουν οι γωνίες αλλά παραμένουν ορθές).*
- *Αντικαθιστώντας την γωνία* θ_0 *στις σχέσεις μετασχηματισμού προκύπτει:*
- $\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \Rightarrow$
- $\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \varepsilon_{max}$, *με* $\varepsilon_{max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$
- *Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κύκλος του Mohr ως εργαλείο επίλυσης.*